مقدمة في
نظرية
التركيبات

الدكتور أحمد حميد شراري
الدكتور محمد عبدالعزيز الزهيري

قسم الرياضيات - جامعة الملك سعود

المقدمة

تعتبر نظرية التركيبات من فروع الرياضيات التي تشهد اهتماماً كبيراً و تطوراً سريعاً في وجهيها النظري و التطبيقي. ويعود ذلك إلى تطبيقاتها الكثيرة في ميادين متنوعة كعلوم الحاسوب و الاتصالات و النقل و علم الجينات و تصميم التجارب و الجدولة.

تعالج نظرية التركيبات ثلاثة أنواع رئيسة من المسائل: مسائل الوجود، مسائل العد و السرد، مسائل الإنشاء. و تبحث هذه المعالجة عن إجابات للأسئلة: هل يوجد تشكيل تركيبي من نوع معين؟ كم هو عدد التشكيلات التركيبية و هل يمكن سردها؟ كيف نختار من بين التشكيلات التركيبية المكنة تشكيلاً أمثلياً بالنسبة إلى معيار ما؟ و يلاحظ أنه عندما تكون مسألة الوجود سهلة فإن الاهتمام ينصب على مسألة العد و السرد، وبالرغم من أن معظم النتائج المعروفة يتعلق بالعد إلا أن أهمية السرد بدأت تتجلى حديثاً لعلاقته بعلم الحاسوب. وعندما تكون مسألة الوجود صعبة فغالباً ما تكون مسألة العد و السرد ذات أهمية متدنية. وفي مسألة الإنشاء فإننا نبحث عن خوارزمية جيدة لإيجاد حل امثلي بالنسبة إلى شروط معينة مسبقاً.

يقدم هذا الكتاب مدخلاً إلى مسألتي الوجود و العد حيث يعرض الأساسيات التي لا تستند إلى مواضيع متقدمة في الرياضيات. و يعالج التفكير التركيبي مسألة العد ضمنياً باستخدام فكرة التقابل لاختزال مسائل معطاة إلى مسائل

محلولة مسبقا. نبدأ باستعراض مبادئ العد الأساسية، نموذج العينة للعد، مسألة عدد الحلول في الأعداد الصحيحة لمعادلة خطية. ثم ننتقل إلى تقديم أدوات أكثر فعالية في معالجة مسائل العد. في الحقيقة، نقدم الدوال المولدة، العلاقات الارتدادية، مبدأ التضمين و الإقصاء، بقدر مناسب من التفصيل. ولكننا لا نقدم نظرية بوليا للعد بالرغم من أهميتها وذلك لأن فهمها يحتاج معرفة رياضية متقدمة نسبيا. بعد ذلك، ننتقل إلى مسائل الوجود عبر تقديم مبدأ برج الحمام و أعداد رمزي؛ و لكننا لا نتطرق إلى مواضيع مهمة أخرى مثل تصميم التجارب.

و سيقدر المؤلفان أية ملاحظات تبدى من قراء هذا الكتاب؛ و يمكن إرسال أية تعليقات أو اقتراحات عبر البريد الألكتروني zohairi@ksu.edu.sa

وفي الختام نأمل أن نكون قد وفقنا في تقديم مدخل سهل إلى نظرية التركيبات وأن يكون هذا الكتاب إضافة علمية إلى ما كتب بالعربية، و الله من وراء القصد.

المؤلفان

المحتويات

المقدمة .... ج
المحتويات ٥

الفصل الأول: طرق أساسية للعد

(١،١) مبدأي المجموع و حاصل الضرب ٢
(١،٢) مبدأ التقابل ٤
(١،٣) نموذج العينة للعد ٤
تمارين(١،١) ١٢
(١،٤) مبرهنة ذات الحدين ١٦
تمارين(١،٢) ٢٤
(١،٥) نموذج التوزيع للعد ٢٦
(١،٦) تجزئات المجموعات ٣٢
(١،٧) تجزئات الأعداد الصحيحة ٣٨
تمارين(١،٣) ٤٣

الفصل الثاني: مبدأ التضمين و الإقصاء

.... ٤٦

تمارين ٥٩

الفصل الثالث: الدوال المولدة

(١، ٣) مقدمة ٦٤

(٢، ٣) الدوال المولدة العادية ٦٧

تمارين(١، ٣) ٦٨

(٢، ٣) الدوال المولدة الأسية ٨٩

تمارين(٢، ٣) ٩٦

الفصل الرابع: العلاقات الارتدادية

(١، ٤) مقدمة ٩٩

(٢، ٤) العلاقات الارتدادية الخطية المتجانسة ١٠١

(٣، ٤) العلاقات الارتدادية غير المتجانسة ١١٠

(٣، ٤) بناء العلاقات الارتدادية ١٢٢

تمارين ١٣٤

الفصل الخامس: مبدأ برج الحمام و أعداد رمزي

(١، ٥) مبدأ برج الحمام ١٤٦

تمارين(١، ٥) ١٥٠

(٥،٢) أعداد رمزي ١٥٤
تمارين(٥،٢) ١٦١
دليل المصطلحات ١٦٣
المراجع ١٦٥

الفصل الأول

مبادئ العد الأساسية

BASIC COUNTING PRINCIPLES

يعتبر العد هدفا أساسيا من دراسة نظرية التركيبات. تدعى نظرية التركيبات أحيانا "فن العد" لأننا نعد عناصر مجموعة منتهية دون أن نكتب عناصرها في قائمة مفصلة. يهدف هذا الفصل إلى التعرف على صور العد الست القياسية. هذه المسائل الست إضافة إلى مبادئ المجموع و حاصل الضرب و التقابل تمثل الأدوات الرئيسة لحل معظم مسائل هذا الكتاب.

هذه المسائل الست يمكن النظر إلى أربع منها (المتتاليات، التباديل، التركيبات، المجموعات المضاعفة) من خلال نموذجين: نموذج العينة للعد و نموذج التوزيع للعد[1]، في حين المسألتان المتبقيتان (تجزئة المجموعات، تجزئة الأعداد الصحيحة) لا يمكن النظر إليهما إلا من خلال نموذج التوزيع للعد.

[1] هذان النموذجان ليسا الوحيدين للعد. هناك نموذج الدوال للعد الذي يعد صياغة دقيقة لنموذج التوزيع للعد . أنظر البند الرابع من الفصل الأول في المرجع [5].

(١،١) مبدأي المجموع و حاصل الضرب

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية تحقق $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ ، فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ المجموع** The Rule of Sum.

يمكن إثبات مبدأ المجموع بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.

غالبا ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ المجموع عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز أي من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، و إذا كان لا يمكن إنجاز A_i و A_j في الوقت نفسه لكل $i \neq j$ وكان عدد طرق إنجاز A_t هو n_t لكل عدد صحيح $1 \leq t \leq k$ ، فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية فإن $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ حاصل الضرب** The Rule of Product. يمكن إثبات مبدأ حاصل الضرب بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.

غالبا ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ حاصل الضرب عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز المتتالية التالية من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، (A_1 أولا ثم A_2 ثانيا وهكذا) و إذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لا يعتمد على الكيفية التي تم بها إنجاز المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}$ لكل عدد

صحيح $2 \leq j \leq k$ ، وكان عدد طرق إنجاز A_j هو n_j فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

مثال(١،١)

لتكن Σ أبجدية عدد حروفها m. جد $|\Sigma_n|$ حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات التي طول كل منها n والتي حروفها من الأبجدية Σ.

الحل: لتكن $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ كلمة من Σ_n. عدد طرق اختيار الحرف x_i هو m لكل $1 \leq i \leq n$ ، كما أن اختيار الحرف x_i لا يعتمد على اختيار الحروف التي قبله. إذن استنادا إلى مبدأ حاصل الضرب $|\Sigma_n| = m^n$.

مثال(٢،١)

يعمل في مستشفى 4 أطباء و 7 ممرضين و 3 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب و ممرض و فني؟

الحل: يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق و يمكن اختيار الممرض بسبع طرق و يمكن اختيار الفني بثلاث طرق. استنادا إلى مبدأ حاصل الضرب عدد الطرق الممكنة هو $4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$

مثال(٣،١)

كم عددا مكونا من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عددا فرديا؟

الحل: ليكن y هو رقم الآحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x. يمكن اختيار x من المجموعة $\{1,2,\ldots,9\}$ و بالتالي فإن عدد طرق اختيار x هو 9. إذا كان x فرديا فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{0,2,4,6,8\}$، أما إذا كان x زوجيا فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ و بالتالي فإن عدد طرق اختيار y بعد اختيار x هو 5. إذا عدد الأعداد المطلوبة هو $9\cdot 5 = 45$. لاحظ أنه لو بدأنا باختيار y فإن عدد طرق اختيار x بعد اختيار y ليس ثابتا.

(١،٢) مبدأ التقابل

إذا كان $f : A \to B$ تقابلا من المجموعة A إلى المجموعة B فإن $|A|=|B|$.

(١،٣) نموذج العينة للعد

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. إن أخذ عينة من A يعتمد على الإجابة عن السؤالين التاليين:

الأول: هل ترتيب العناصر مهم في هذه العينة أم لا؟

الثاني: هل تكرار ظهور عنصر في العينة مقبول أم لا؟

إذن لدينا أربع حالات، يوضحها المثال التالي، سنتحدث عن كل منها.

مثال(١،٤)

لتكن لدينا المجموعة $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. يوضح الجدول المعطى أدناه العينات المكونة من عنصرين و المأخوذة من A

	التكرار غير مقبول	التكرار مقبول
الترتيب مهم	$a_1a_2, a_1a_3, a_2a_1,$ a_2a_3, a_3a_1, a_3a_2	$a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3,$ $a_2a_1, a_2a_2, a_2a_3,$ a_3a_1, a_3a_2, a_3a_3
الترتيب غير مهم	$\{a_1,a_3\}$ $\{a_1,a_2\}$ $\{a_2,a_3\}$	$\{a_1,a_2\}$ $\{a_1,a_1\}$ $\{a_2,a_2\}$ $\{a_1,a_3\}$ $\{a_3,a_3\}$ $\{a_2,a_3\}$

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **متتالية** طولها r (أو متتالية مكونة من r عنصرا) r- sequence من A إذا كان يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم و نكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$. بمناقشة مماثلة لما فعلنا في مثال(١،١) يمكن إثبات أن عدد المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها n هو n^r.

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **تبديلا** طوله r، (أو تبديلا مكونا من r عنصرا) r- permutation من A إذا كان لا يسمح فيها بالتكرار و الترتيب فيها مهم و نكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$.

مبرهنة(١،١)

عدد التباديل التي طولها r من مجموعة عدد عناصرها n هو

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

البرهان: لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة و ليكن $p=x_1x_2\ldots x_r$ تبديلا من الطول r من A. لاحظ أن:

١- عدد طرق اختيار x_1 هو n.

٢- عدد طرق اختيار x_2 هو $n-1$.

٣- عدد طرق اختيار x_3 هو $n-2$.

$\vdots$

r- عدد طرق اختيار x_r هو $n-r+1$.

و حيث إن الاختيارات مستقلة في كل مرحلة، فحسب مبدأ حاصل الضرب يكون عدد التباديل التي طولها r من A هو $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ ■

نرمز لعدد التباديل التي طولها r من مجموعة سعتها n عادة بالرمز $(n)_r$ أو بالرمز $P(n,r)$. لاحظ أن

$$(n)_r=P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. أي مجموعة جزئية من A من السعة r r- subset يمكن النظر إليها عل أنها عينة من A سعتها r الترتيب فيها غير مهم ولا يسمح فيها بالتكرار. تسمى المجموعة الجزئية أحيانا **توفيقا** أو **تركيبا** combination.

مبرهنة(٢،١)

عدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة عدد عناصرها n هو

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

البرهان: إذا كان $r=0$ فإن المجموعة الجزئيـــة الخاليـة هـي الوحيـدة الـتي لا تحوي عناصر.

نفرض أن $r>0$. لاحظ أن أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r تقابل $r!$ تبديلا مختلفا في مجموعة التباديل التي طولها r. كذلك يمكننا الحصول على $r!$ تبديلا مختلفا من أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r. و بناء عليه فإن

$r!\times$ (عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r) = عدد التباديل التي طولها r

من المبرهنة(١،١) نستنتج أن عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r يساوي $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ■

يرمز لعدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة سعتها n بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز $C(n,r)$.

مثال(١،٥)

إذا كانت ورقة اختبار تحوي 7 أسئلة و كان على الطالب أن يجيب عن 5 أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب على الاختبار؟

الحل: عدد طرق الإجابة هو $\binom{7}{5} = 21$.

مثال(١،٦)

يعمل 12 مهندسا في شركة، و من أجل تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

(أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

(ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصر مهندسان على العمل معا؟

(ج) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملا معا؟

الحل: (أ) عدد الطرق المكنة هو $\binom{12}{5} = 792$.

(ب) ليكن المهندسان اللذان يصران على العمل معا هما a و b. إذا كان a و b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق المكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{3}$، أما إذا كان الفريق المختار لا يتضمن كلا من a و b فإن عدد الطرق المكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{5}$. إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق المكنة هو

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 120 + 252 = 372$$

(ج) ليكن المهندسان اللذان يرفضان العمل معا هما a و b. إذا كان a ضمن الفريق المختار فإن b ليس ضمن الفريق و بالتالي فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $\binom{10}{4}$. بالمثل إذا كان b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{4}$. أما إذا كان الفريق لا يتضمن كلا من a و b فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{5}$. إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق المكنة هو:

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 210 + 210 + 252 = 672 .$$

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **مجموعة جزئية مضاعفة** سعتها r من A (r- multiset) إذا كان الترتيب فيها غير مهم و يسمح فيها بالتكرار و نكتبها على الشكل $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

وفقا لما ذكر أعلاه فإن $\{a,a,b,c,c,c,d\}$ مجموعة جزئية مضاعفة سعتها 7 و فيها تكرار كل من a,b,c,d يساوي 2,1,3,1 على الترتيب.

مثال(١،٧)

المجوعات الجزئية المضاعفة و التي سعتها 3 من $\{a,b,c\}$ هي:

$\{a,a,a\},\{a,a,b\},\{a,a,c\},\{a,b,c\},\{b,b,b\},\{b,b,a\},\{b,b,c\},$
$\{c,c,c\},\{c,c,a\},\{c,c,b\}.$

مبرهنة(١،٣)

عدد المجموعات الجزئية المضاعفة التي سعتها r من مجموعة سعتها n يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان: لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. لكل مجموعة جزئية مضاعفة سعتها r من A ، نكون جدولا مكونا من n عمودا و سطرين. نضع في مستطيلات السطر الأول من اليسار إلى اليمين $a_1,a_2,\ldots,a_n$ على الترتيب، و لكل $i=1,2,\ldots,n$ نضع في المستطيل أسفل a_i نجوما عددها يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في المجموعة المضاعفة. لاحظ أن عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني يساوي r. فمثلا المجموعة المضاعفة $\{a_1,a_1,a_1,a_3\}$ من المجموعة $\{a_1,a_2,a_3\}$ يقابلها الجدول

a_1	a_2	a_3
***		*

وبالعكس، أي جدول عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني فيه r تقابله مجموعة مضاعفة من A سعتها r. عليه، يوجد تقابل بين المجموعات المضاعفة و الجداول. لحساب عدد الجداول نعمل التغيير التالي في الجدول:

نحذف الخطوط الأفقية الثلاثة كما نحذف العناصر من الصف الأول و الخطين الرأسيين الأول و الأخير من الجدول. فمثلا الجدول أعلاه يصبح بعد التغيير *||*** و بالعكس **|**| تقابل المجموعة المضاعفة $\{a_2, a_2, a_3, a_3\}$. إذا عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r يساوي عدد تباديل r نجمة و $n-1$ خطا رأسيا. لحساب هذا العدد لدينا $n-1+r$ مكانا، إذا اخترنا r مكانا للنجوم فستكون الأمكنة المتبقية للخطوط الرأسية. و حيث إن عدد طرق اختيار r مكانا من $n-1+r$ مكانا هو $\binom{n-1+r}{r}$ فإن عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r هو $\binom{n-1+r}{r}$ ■

تمارين(١،١)

١- (أ) كم عددا صحيحا يقع بين 1 و99 لا يوجد فيه رقمان متشابهان؟

(ب) كم عددا صحيحا زوجيا يقع بين 1 و99 لا يوجد فيه رقمان متشابهان؟

(ب) كم عددا صحيحا فرديا يقع بين 1 و99 لا يوجد فيه رقمان متشابهان؟

٢- إذا كانت $B=\{100,101,\ldots,999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B و أرقامها مختلفة؟

٣- إذا كانت $B=\{1000,1001,\ldots,9999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B و أرقامها مختلفة؟

٤- رميت قطعة نقد ثلاثين مرة، كم عدد المتتاليات الممكنة لظهور الصورة و الكتابة؟

٥- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن عشرين سؤالا إذا كان يمكن الإجابة عن أي منها بنعم أو لا؟

٦- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن أسئلة امتحان مكون من خمسين سؤالا إذا كان لكل إجابة عن سؤال من العشرين الأولى ثلاثة خيارات و لكل إجابة سؤال من الثلاثين الباقية خمسة خيارات؟

٧- كم عدد طرق ترتيب حروف كلمة COMPUTER

(أ) إذا كانت حروف العلة متجاورة؟

(ب) إذا كان الحرف P يظهر إلى يسار T؟

(ج) إذا كان هناك حرفين فقط بين M وC؟

٨- احسب $\binom{5}{2}\binom{7}{3}$ ، $\binom{8}{1}$ ، $\binom{10}{7}$

٩- بسط $\binom{n}{n}$ ، $\binom{n}{n-1}$ ، $\binom{n}{1}$ ، $\binom{n}{0}$

١٠- جد $(n)_1$ ، $(7)_6$ ، $(8)_4$ ، $(8)_3$

١١- وضح أن $(n)_n = (n)_{n-1}$

١٢- وضح أن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

١٣- أثبت أن $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$

١٤- مستخدما التمرين ١٣ ، أثبت أن $\binom{2n}{n}$ عدد زوجي إذا كان $n \geq 1$.

١٥- أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n يوجد على الأقل n عددا غير أولي.

[إرشاد: اعتبر الأعداد $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$]

١٦- بكم طريقة يمكن أن يجلس n فردا حول طاولة مستديرة؟

١٧- تستخدم سفينة إرسال إشارات برفع سبعة أعلام متتابعة على سارية. كم إشارة مختلفة يمكن إرسالها بخمسة أعلام مختلفة ألوانها؟

١٨- بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمر متطابقة و أربع سيارات بيض متطابقة بحيث لا تتجاور سيارتان لهما اللون نفسه؟

١٩- بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمر مختلفة و أربع سيارات بيض مختلفة بحيث لا تتجاور سيارتان حمراوان؟

٢٠- كم عدد الكلمات المكونة من خمسة أحرف من الأبجدية العربية إذا كان لا يسمح بتكرار الحرف؟

٢١- طالب لديه 25 من الكتب المختلفة ولديه رف يتسع فقط لعشرة كتب. بكم طريقة يمكنه أن يصف عشرة من كتبه على الرف؟

٢٢- كم عدد تباديل $\{1,2,\cdots,n\}$ التي تثبت الرقم 1؟

٢٣- بكم طريقة يمكن تجزئة 12 عنصرا مختلفا إلى ثلاث مجموعات تتكون كل منها من أربعة عناصر؟

٢٤- بكم طريقة يمكن تجزئة $2n$ عنصرا مختلفا إلى n مجموعة تتكون كل منها من عنصرين؟

٢٥- بكم طريقة يمكن تجزئة mn عنصرا مختلفا إلى m مجموعة عدد عناصر كل منها n؟

٢٦- أثبت أن $r!$ يقسم حاصل ضرب أي r من الأعداد الصحيحة الموجبة المتعاقبة. [إرشاد: اعتبر طرق اختيار r عنصرا من مجموعة عدد عناصرها $n+r-1$]

٢٧- n عصا مختلفة كسر كل منها إلى جزئين طويل و قصير. بكم طريقة يمكن تكوين n زوجا من الأجزاء بحيث كل زوج يتكون من جزء قصير وآخر طويل؟

٢٨- شركة حلويات تضع في كيس مجموعة من 10 أصابع من الشوكلاته تختارها من بين ثلاثة أنواع.

(أ) بكم طريقة يمكن أن تكون هذه المجموعة؟

(ب) كم عدد المجموعات التي تحوي على الأقل واحدا من كل نوع؟

٢٩- لتكن A مجموعة عدد عناصرها n.

(١) جد عدد العلاقات التي يمكن تعريفها على A؟

(٢) جد عدد العلاقات R على A في الحالات التالية:

(أ) R انعكاسية.

(ب) R تناظرية.

(ج) R انعكاسية و تناظرية.

(د) R تخالفية.

٣٠- جد عدد المتجهات $v=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ في الحالات التالية:

(أ) $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ب) $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,k_i-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ج) $\alpha_i \in \{0,1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$ و $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$.

٣١- إذا كان $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ تحليلا للعدد n إلى عوامله الأولية فجد

(أ) عدد قواسم n.

(ب) عدد قواسم n التي لا يقسمها أي مربع كامل مختلف عن 1.

٣٢- إذا كان p عددا أوليا فأثبت أن p يقسم $\binom{p}{k}$ لكل عدد صحيح $0<k<p$.

(١،٤) مبرهنة ذات الحدين

في هذا البند سنقدم مبرهنة ذات الحدين و التي يمكن النظر إليها كتطبيق من تطبيقات التوافيق. كما سنقدم مبرهنة متعددة الحدود و التي تعتبر تعميماً لمبرهنة ذات الحدين.

مبرهنة(١،٤) (متطابقة الكرجي و باسكال)

لأي عددين صحيحين $n \geq k \geq 1$ فإن المتطابقة التالية متحققة

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

البرهان: لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة عدد عناصرها n. و لتكن B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k. لدينا حالتان: إما $a_n \in B$ أو $a_n \notin B$. حسب مبدأ المجموع فإن عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k يساوي عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n مضافا إليه عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $A-\{a_n\}$ من السعة k، إذا يساوي $\binom{n-1}{k}$.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ من السعة $k-1$ ، إذاً يساوي $\binom{n-1}{k-1}$.

عليه ، $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ■

باستخدام متطابقة باسكال يمكن إنشاء مثلث باسكال الذي يتكون من قيم $\binom{n}{k}$.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

… … … … … … … …

مبرهنة(١،٥) (مبرهنة ذات الحدين)

لأي عددين حقيقين x, y ، و أي عدد صحيح غير سالب n ، فإن

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

البرهان: نستخدم الاستقراء الرياضي على n. المبرهنة صحيحة عندما $n = 0$ لأن الطرف الايسر يساوي $(x+y)^0 = 1$ ، كما أن الطرف الأيمن يساوي $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$.

لنفرض صحة المبرهنة عندما $n = k \geq 0$ ، أي أن:

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k$$

نريد إثبات صحة المبرهنة عندما $n = k+1$. أي نريد إثبات أن

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

لاحظ أن

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$$

ومن فرضية الاستقراء

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k]$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k$$

$$+ \binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \{\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\}x^k y + \{\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\}x^{k-1}y^2 + \cdots +$$

$$\{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

علما أننا حصلنا على المساواة الأخيرة باستخدام متطابقة باسكال ■

لاحظ أن عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x+y)^n$ يساوي $n+1$.

تسمى المتسلسلة

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series). و من حساب التفاضل نعلم أنه إذا كان $|x|<1$ فإنه لكل عدد حقيقي $k\in R$ يكون

$$\begin{aligned}(1+x)^k &= 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n\end{aligned}$$

حيث n عدد صحيح و

$$\binom{k}{n}=\begin{cases}0 & ,n<0\\ 1 & ,n=0\\ \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & ,n>0\end{cases}$$

هي معاملات ذات الحدين المعممة (Generalized Binomial Coefficients). و بغرض الاستخدام في الفصل المتعلق بالدوال المولدة نجد الآن مفكوك $(1-x)^{-m}$ حيث m عدد صحيح موجب كما يلي:

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{-m} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-m}{n}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}\;x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\;x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+n-1)\cdots(m+1)m}{n!}\;x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\;x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\;x^n
\end{aligned}
$$

مثال(١،٨)

جد مفكوك $(x+y)^3$.

الحل:

$$
(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
$$

مثال(١،٩)

$$
2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}
$$

مثال(١٠،١)

أثبت أن :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

الحل

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots$$

و منه

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

و بالتعويض في المثال(٩،١) نجد أن

$$2^n=2\{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots\}$$

إذا

$$2^{n-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$$

كل متتالية مكونة من جميع عناصر المجموعة المضاعفة A تسمى تبديلا لـ A .

فمثلا، تبديلات $A=\{a,b,b\}$ هي abb و bab و bba.

مبرهنة(١،٦)

إذا كان لدينا n من العناصر المأخوذة من k نوعا بحيث عدد العناصر المأخوذة من النوع رقم i هو r_i لكل $1 \le i \le k$، فإن عدد تباديل هذه العناصر يساوي $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$

البرهان

لدينا n مكانا. للعناصر من النوع الأول و التي عددها r_1 يمكن أن نختار r_1 مكانا من n مكانا بـ $\binom{n}{r_1}$ طريقة. للعناصر من النوع الثاني و التي عددها r_2 يمكن أن نختار r_2 مكانا من $n-r_1$ مكانا بـ $\binom{n-r_1}{r_2}$ طريقة. وعموما للعناصر من النوع رقم i و التي عددها r_i يمكن أن نختار r_i مكانا من $n-r_1-r_2-\cdots-r_{i-1}$ مكانا بـ $\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{i-1}}{r_i}$ طريقة، لكل $2 \le i \le k$. ومن مبدأ حاصل الضرب ينتج المطلوب ■

مثال(١،١١)

كم عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف كلمة ABACDDEFA؟

الحل

$$\frac{9!}{3!1!.1!2!1!1!} = \frac{9!}{3!2!} = 30240$$

مبرهنة(١،٧) (مبرهنة متعددة الحدود)

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ أعدادا حقيقية و كان n عددا صحيحا غير سالب،فإن:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$$

حيث الجمع مأخوذ على كل الأعداد الصحيحة غير السالبة $r_1, r_2, \ldots, r_m$ التي تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ ؛ و حيث $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$.

البرهان

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \quad (n \text{ مرة})$$

ومنه أي حد من حدود المفكوك يكون من الشكل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ حيث $r_1, r_2, \ldots, r_m$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. معامل هذا الحد هو عدد تباديل r_1 عنصرا من النوع x_1 و r_2 عنصرا من النوع x_2 و ... و r_m عنصرا من النوع x_m. من المبرهنة(١،٦) يكون معامل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ هو $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ ■

لاحظ أنه إذا و ضعنا $m = 2$ في المبرهنة(١،٧) فإننا نحصل عل مبرهنة ذات الحدين. كذلك عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ هو $\binom{m-1+n}{n}$ وذلك لأن عدد حلول $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ في الأعداد الصحيحة غير السالبة يساوي $\binom{m-1+n}{n}$ كما سيثبت لاحقا في النتيجة(١،١٠).

مثال(١،١١)

جد مفكوك $(x+y+z)^2$.

الحل: عدد الحدود في المفكوك هو $6 = \binom{4}{2} = \binom{3-1+2}{2}$. من مبرهنة متعددة الحدود فإن

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2 + \binom{2}{0,2,0}y^2 + \binom{2}{0,0,2}z^2 +$$
$$\binom{2}{1,1,0}xy + \binom{2}{1,0,1}xz + \binom{2}{0,1,1}yz$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

تمارين(١،٢)

١- استخدم مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x-2)^5$.

٢- استخدم مثلث باسكال لإيجاد مفكوك $(x+1)^6$.

٣- استخدم مبرهنة متعددة الحدود لإيجاد مفكوك $(x+y+z)^4$.

٤- ما هو معامل $x^3y^2z^5$ في مفكوك $(x+y+z)^{10}$؟

٥- كم عدد حدود مفكوك $(x+y+z)^{70}$؟

٦- باستخدام مبرهنة ذات الحدين أثبت أن: $3^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$.

٧- أوجد قيمة x إذا كان $x^{100} = \sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}8^k$.

٨- كم عدد تباديل حروف كلمة MISSISSIPPI بحيث I لا يجاور I؟

٩- كم عدد تباديل حروف كلمة ILLINOIS بحيث لا يظهر I إلى يسار L؟

١٠- كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول n و التي تحوي عددا زوجيا من الأصفار و عددا فرديا من الرقم 1؟

١١- كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول n و التي تحوي عددا زوجيا من الأصفار و عددا زوجيا من الرقم 1؟

١٢- لأي عدد صحيح موجب n ، أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^{n-k} = n3^{n-1}$.

١٣- أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

١٤- أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة $\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$.

١٥- أعط برهانا تركيبيا للمتطابقة $\binom{n+1}{r+1} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r}$.

١٦- أثبت أن $\binom{r-1}{k-1} = \binom{r}{k} - \binom{r}{k+1} + \binom{r}{k+2} - \binom{r}{k+3} + \cdots + (-1)^{r-k}\binom{r}{r}$.

[إرشاد: إستخدم متطابقة باسكال]

١٧- اكتب مفكوك $2^p = (1+1)^p$ ثم أثبت أن $p \mid (2^p - 2)$ ، حيث p عدد أولي.

١٨- أثبت أن $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$. تسمى هذه المتطابقة صيغة فاندرمنود للالتفاف (Vandermonde's convolution formula).

(١،٥) نموذج التوزيع للعدّ

يهدف هذا البند إلى تقديم نموذج التوزيع للعد

(The distribution model of counting). ليكن لدينا r كرة نريد توزيعها على n

صندوقا، ثلاثة أسئلة مهمة في هذا السياق:

الأول: هل الكرات مختلفة أم متطابقة؟

الثاني: هل من الممكن أن يحوي الصندوق أكثر من كرة؟

الثالث: هل الصناديق مختلفة أم متطابقة؟

في هذا البند سنفرض أن الصناديق مختلفة. إذا لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي:

مثال(١،١٢)

يوضح الجدول التالي كل التوزيعات الممكنة لكرتين على ثلاثة صناديق مختلفة.

	لا شروط على عدد الكرات في كل صندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$\lfloor b_1, b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b_1, b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b_1, b_2 \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$	$\lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b_1 \rfloor \lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b_2 \rfloor \lfloor b_1 \rfloor$
الكرات متطابقة	$\lfloor b, b \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b, b \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b, b \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor$	$\lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b \rfloor \lfloor\ \rfloor \lfloor b \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor b \rfloor$

ليكن لدينا توزيع لـ r كرة مختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. نكون متتالية $x_1x_2\ldots x_r$ طولها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مستخدمين التوزيع المعطى كما يلي: x_i هو الصندوق الذي يحوي الكرة b_i لكل $1 \le i \le r$.

و بالعكس ، إذا كانت $x_1x_2\ldots x_r$ متتالية طولها r من مجموعة الصناديق $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ فإننا نكون توزيعا للكرات المختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على الصناديق مستخدمين المتتالية المعطاة كما يلي: نضع الكرة b_i في الصندوق x_i لكل $1 \le i \le r$. عليه، توزيعات r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة تقابل المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها n.

و بالمثل يمكن توضيح أن توزيعات r كرة مختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و التي لا يحوي فيها صندوق أكثر من كرة تقابل التباديل التي طولها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. عليه، ومن المبرهنة(١،١) ينتج أن:

مبرهنة(١،٨)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة يساوي n^r.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق اكثر من كرة يساوي $(n)_r$.

لتكن لدينا r كرة متطابقة موزعة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. لكل توزيع نأخذ عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ الترتيب فيها غير مهم و سعتها r حيث $x_1, x_2, \ldots, x_r$ هي الصناديق التي تحوي الكرات. و بالعكس كل عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ سعتها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، لا يكون فيها الترتيب مهما تقابل توزيعا لكرات متطابقة عددها r على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ كما يلي: نوزع الكرات بحيث يكون عدد الكرات في الصندوق a_i يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في العينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. عليه، يوجد تقابل بين توزيعات r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و العينات من الطول r التي لا يكون فيها الترتيب مهما و المأخوذة من مجموعة سعتها n.

لاحظ أنه إذا كان كل صندوق يحوي كرة على الأكثر ، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات. أما إذا لم يكن هناك شروط على عدد الكرات في الصناديق، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات مضاعفة. من ذلك ومن المبرهنتين (١،٢) و (١،٣) نستنتج أن:

مبرهنة(١،٩)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق اكثر من كرة يساوي $\binom{n}{r}$.

نتيجة(١،١٠)

لكل عدد صحيح $r \geq 0$ فإن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان: لننظر إلى المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كصناديق مختلفة، أي حل صحيح غير سالب للمعادلة يمكن رؤيته كتوزيع لـ r كرة متطابقة على الصناديق المختلفة $X_1, X_2, \ldots, X_n$. و العكس بالعكس. من المبرهنة(١،٩)، عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$ ■

مثال(١،١٣)

كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 2$ ؟

الحل: من النتيجة (١٠،١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+2}{2}=\binom{4}{2}=6$$

مثال(١٤،١)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=30$ إذا كان $X_1\geq 3$ و $X_2\geq 5$ و $X_3>6$ ؟

الحل: حيث إن الحلول صحيحة فإن $X_3>6$ تكافئ $X_3\geq 7$. لنفرض $Y_1=X_1-3$ و $Y_2=X_2-5$ و $Y_3=X_3-7$. لاحظ أن

$$Y_1+Y_2+Y_3=X_1-3+X_2-5+X_3-7=30-15=15$$

ومنه عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=30$ إذا كان $X_1\geq 3$ و $X_2\geq 5$ و $X_3>6$ يساوي عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $Y_1+Y_2+Y_3=15$.

من النتيجة (١٠،١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+15}{15}=\binom{17}{15}=\binom{17}{2}=\frac{(17)(16)}{2}=136$$

(١،٦) تجزئات المجموعات

في هذا البند نجد عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة منتهية عدد عناصرها n أو ما يسمى بأعداد ستيرلنج من النوع الثاني؛ و نوضح أن عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n يساوي عدد طرق توزيع n من الكرات المختلفة على k من الصناديق المتطابقة بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل.

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ **تجزئة** للمجموعة A إلى k جزءا أو تجزئة عدد أجزائها k إذا تحقق ما يلي:

١- $\phi \neq A_i \subseteq A$ لكل $1 \leq i \leq k$.

٢- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

٣- $A_i \cap A_j = \phi$ إذا كان $1 \leq i \neq j \leq k$.

لتكن $X = \{b_1, b_2, b_3\}$ مجموعة مكونة من ثلاث كرات مختلفة. يمكن النظر إلى التجزئة $\{\{b_1, b_2\}, \{b_3\}\}$ على أنها توزيع للكرات b_1, b_2, b_3 على صندوقين متطابقين بحيث تكون b_1, b_2 في صندوق و b_3 في الصندوق الآخر.

و بوجه عام إذا كانت X مجموعة منتهية عدد عناصرها n فكل تجزئة عدد أجزائها k تقابل توزيعا لكرات مختلفة عددها n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل. كذلك أي توزيع لكرات مختلفة عددها

n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل يقابل تجزئة عدد أجزائها k للمجموعة X .

يرمز لعدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n بالرمز $S(n,k)$ و تسمى $S(n,k)$ أعداد ستيرلنج من النوع الثاني

Stirling numbers of the second kind.

لتكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. لاحظ أن $\{X\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها 1 للمجموعة X . و منه $S(n,1)=1$. كذلك $\{\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_n\}\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها n للمجموعة X . عليه $S(n,n)=1$.

مثال(١،١٥)

أوجد $S(4,2)$.

الحل: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$. التجزئات التي عدد أجزائها 2 للمجموعة X هي:

$\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ ، $\{\{b\},\{a,c,d\}\}$ ، $\{\{c\},\{a,b,d\}\}$ ، $\{\{d\},\{a,b,c\}\}$ ، $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ ، $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$ ، $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$. عليه $S(4,2)=7$.

مثال(١،١٦)

$S(n,n-1)=\binom{n}{2}$ لأي عدد صحيح موجب n .

البرهان: لتكن P تجزئة عدد أجزائها $n-1$ لمجموعة X عدد عناصرها n. لاحظ انه يوجد جزء واحد فقط من هذه الأجزاء مكون من عنصرين و كل من الأجزاء الأخرى مكون من عنصر واحد فقط . أي أن كل تجزئة تتحدد تماما بتعيين الجزء المكون من عنصرين. و منه :

عدد التجزئات التي عدد أجزائها $n-1$ للمجموعة X يساوي عدد المجموعات الجزئية من X و المكونة من عنصرين. أي يساوي $\binom{n}{2}$.

مثال(١٧، ١)

أوجد $S(4,3)$.

الحل: من المثال(١٦، ١) أعلاه:

$$S(4,3)=\binom{4}{2}=6$$

حيث إن الأجزاء في التجزئة يجب أن تكون منفصلة زوجا زوجا و غير خالية فإن $S(n,k)=0$ لأي عددين صحيحين موجبين $k>n$. نعرف $S(0,0)=1$ و $S(n,0)=0$ لكل عدد صحيح موجب n و نستفيد من ذلك في حساب أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام المبرهنة التالية.

مبرهنة(١٢،١)

لكل عددين صحيحين موجبين n,k فإن

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$$

البرهان: لتكن $N=\{1,2,\dots,n\}$ و $N'=\{1,2,\dots,n,n+1\}$. أي تجزئة للمجموعة N' إلى k جزءا يمكن الحصول عليها بطريقة وحيدة من التالي:

١- تجزئة للمجموعة N إلى $k-1$ جزءا، وذلك بإضافة المجموعة $\{n+1\}$ إلى تلك التجزئة. عدد التجزئات في هذه الحالة هو $S(n,k-1)$.

٢- تجزئة للمجموعة N إلى k جزءا، وذلك بتعيين جزء من اجزاء التجزئة (عددها k) و من ثم إضافة العنصر $n+1$ إليه. حسب مبدأ حاصل الضرب، عدد التجزئات في هذه الحالة هو $kS(n,k)$. من مبدأ المجموع، فإن

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k) \quad \blacksquare$$

مثال(١٨،١)

مستخدما المبرهنة(١٢،١) أوجد $S(5,3)$.

الحل:

$$S(5,3)=S(4,2)+3S(4,3)=7+3\cdot 6=25$$

يوضح الجدول التالي طريقة لإيجاد أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام المبرهنة(١٢،١).

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1

مبرهنة(١٣،١)

عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n ، حيث $m \ge n$ ، يساوي $n!S(m,n)$.

البرهان: لتكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ و $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ و لتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة. لكل $1\le i\le n$ نعرف المجموعة $f^{-1}(y_i)=\{x\in X: f(x)=y_i\}$. من الواضح أن $f^{-1}(y_i)\subseteq X$ وأن $f^{-1}(y_i)\cap f^{-1}(y_k)=\phi$ إذا كان $i\ne k$. كذلك $f^{-1}(y_i)\ne\phi$ لأن الدالة شاملة. إذاً $\{f^{-1}(y_i):1\le i\le n\}$ تجزئة عدد اجزائها n للمجموعة X. بالمقابل يمكننا الحصول على $n!$ دالة شاملة لأي تجزئة عدد اجزائها

n للمجموعة X . و حيث إن عدد التجزئات التي عدد اجزائها n للمجموعة X هو $S(m,n)$ ، فينتج من مبدأ حاصل الضرب أن عدد الدوال الشاملة هو $n!S(m,n)$ ■

ويمكن الحصول على أعداد ستيرلنج من المبرهنة التالية التي سنثبتها باستخدام المبرهنة(١٣،١)، وذلك بعد حساب الدوال الشاملة بطريقة أخرى في المبرهنة(٢،٢) في الفصل الثاني.

مبرهنة(١٤،١)

لأي عددين صحيحين موجبين $n \geq k$ فإن $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$

لنرمز لعدد التجزئات لمجموعة سعتها n بالرمز B_n. من الواضح أن $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. تسمى هذه الأعداد بأعداد بل (Bell numbers). فمثلاً $B_4 = 15$. يمكن الحصول على B_n من جدول أعداد ستيرلنج بجمع عناصر الصف رقم n .

(١،٧) تجزئات الأعداد الصحيحة

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. نقول إن المتتالية غير المتزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ تجزئة لِـ n إذا كان $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ و لكل $1 \le i \le n$ نسمي n_i جزءاً . فمثلاً 3,3,2,1 تجزئة للعدد 9.

نرمز لعدد تجزئات العدد n بالرمز $p(n)$. كما نرمز لعـدد تجزئـات العـدد n إلى k جزءاً بالرمز $p_k(n)$.

مثال(١،١٩)

تجزئات العدد 5 هي :

1,1,1,1,1

2,1,1,1

2,2,1

3,1,1

3,2

4,1

5

عليه $p(5) = 7$ كما أن

$p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(5) = 1$.

من الواضح أن: $p(n)=\sum_{k=1}^{n} p_k(n)$

لاحظ أنه من الممكن رؤية التجزئة $n_1,n_2,\dots,n_k$ للعدد الصحيح الموجب n كتوزيع لـ n كرة متطابقة على k من الصناديق المتطابقة بحيث تحوي الصناديق $n_1,n_2,\dots,n_k$ من الكرات. وكذلك يمكن رؤية توزيع n كرة متطابقة على k من الصناديق المتطابقة بحيث لا يوجد صندوق خال كتجزئة للعدد n. عليه، يوجد تقابل بين تجزئات n و توزيعات n كرة متطابقة على صناديق متطابقة بحيث لا يوجد صندوق خال.

من الممكن بسهولة التحقق من أن:

$p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$, $p(6)=11$, $p(7)=15$

كذلك يمكن ملاحظة أن:

$$p_n(n)=p_1(n)=p_{n-1}(n)=1$$

مبرهنة(١٥،١)

لأي عددين صحيحين موجبين n,k ، فإن:

$$p_k(n+k)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_k(n)=\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$$

البرهان: الحد الأيمن هو عدد تجزئات العدد n التي عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k. لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_i$ تجزئة للعدد n إلى i جزءا حيث $i \le k$. من هذه التجزئة نكون تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءا كما يلي: نضيف 1 إلى كل a_i، ثم نضيف متتالية كل حد فيها 1 و طولها $k-i$ فنحصل على

$$a_1+1, a_2+1, \ldots, a_i+1, 1, 1, \ldots, 1$$

حيث

$$(a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_i+1)+(k-i)=a_1+a_2+\cdots+a_i+k=n+k$$

بالمقابل، من أي تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءاً نكون تجزئة للعدد n عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k وذلك بحذف كل الأجزاء التي تساوي 1 ثم طرح 1 من الأجزاء الأخرى. و بالتالي فإن $p_k(n+k)=\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$ ■

نتيجة(١٦،١)

$$p_k(m)=\sum_{i=1}^{k} p_i(m-k)$$

البرهان: ضع $n=m-k$ في المبرهنة(١٥،١)■

يعطي الجدول التالي قيم $p_k(n)$ عندما $1 \le k, n \le 10$ و قد أنشئ استناداً إلى النتيجة(١٦،١) و إلى أن $p_k(n)=0$ عندما $k>n$.

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
n=1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
n=4	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
n=5	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0
n=6	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0
n=7	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0
n=8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0
n=9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0
n=10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

للتجزئة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ للعدد الصحيح الموجب n نكون ***شكل فيرير*** (Ferres diagram) برسم n_i نقطة في الصف رقم i لكل $1 \le i \le k$. فمثلا شكل فيرير للتجزئة 3,2,1,1 للعدد 7 موضح أدناه:

● ● ●

● ●

●

●

كذلك شكل فيرير للتجزئة 4,2,1 للعدد 7 يكون:

● ● ● ●

● ●

●

لكل شكل فيرير لتجزئة للعدد n يمكننا الحصول على منقول (transpose) و ذلك بتحويل الصفوف إلى أعمدة. لاحظ أن ما سنحصل عليه هو شكل فيرير لتجزئة للعدد n نفسه.

مثال(١،٢٠)

تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي 3 هي:

3,1

2,2

2,1,1

1,1,1,1

كما أن التجزئات المقابلة لمنقول شكل فيرير للتجزئات المبينة أعلاه هي على الترتيب:

2,1,1

2,2

3,1

4

نلاحظ أن عدد تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها على الأكثر 3 يساوي عدد التجزئات للعدد 4 إلى ثلاثة أجزاء أو أقل. في الحقيقة، يمكن تعميم ذلك كما في المبرهنة التالية:

مبرهنة(١،١٧)

عدد التجزئات للعدد الصحيح الموجب n إلى أجزاء كل منها على الأكثر k يساوي عدد التجزئات للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر.

البرهان: لاحظ أن منقول شكل فيرير لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k يعطي شكل فيرير لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر. وهذا صحيح لأن أكبر عدد من النقاط في صف في الشكل الأول هو k على الأكثر و عليه فإن عدد الصفوف في المنقول هو k على الأكثر. وبالعكس منقول شكل فيرير لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر هو شكل فيرير لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k.

تمارين(١،٣)

١- اكتب عبارة مكافئة (على شكل عدد الحلول الصحيحة لمعادلة) لما يلي:

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأكثر.

(ج) عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من المجموعة $\{A, B, C, D, E\}$.

(د) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأقل.

٢- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كان $X_k \geq 0$ لكل $1 \leq k \leq 5$؟

٣- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq -3$ ؟

٤- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٥- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٦- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq -2$ ؟

٧- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٨- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلتين $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ و $X_1 + X_2 + X_3 = 5$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٩- لأي عدد صحيح موجب $n \geq 2$ ، أثبت أن $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

١٠- لأي عدد صحيح موجب $n \geq 3$ ، أثبت أن $S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$.

١١- لأي عدد صحيح موجب $n \geq 4$ ، أثبت

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

١٢- لأي عدد صحيح $n \geq 6$ ، أثبت

$$S(n,n-3)=\binom{n}{4}+\binom{n}{3}\binom{n-3}{2}+\frac{1}{6}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}.$$

١٣- لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $Y=\{f,g,h,i\}$. ما عدد الدوال الشاملة من X إلى Y؟

١٤- أكتب كل التجزئات للأعداد $3,4,6,7$.

١٥- لأي عدد صحيح موجب n ، أثبت أن $P_2(n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

١٦- لأي عدد صحيح موجب n ، أثبت أن $p_n(2n)=p(n)$.

١٧- لأي عدد صحيح موجب n ، أثبت أن $p_n(2n+1)=p(n+1)-1$.

١٨- لأي عدد صحيح موجب $n \geq 4$ ، أثبت $p_{n-2}(n)=2$.

مبدأ التضمين و الإقصاء

THE INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE

يعتبر مبدأ المجموع للعدّ أبسط مبادئ العد الأساسية، و يفيدنا بأنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية منفصلة زوجاً زوجاً فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. و مبدأ التضمين و الإقصاء – في أبسط صوره – يعطينا صيغة لحساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ عندما نسمح للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن تكون متشابكة.

فيما يلي سنفرض أن U مجموعة شاملة منتهية معطاة و أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نضع $\alpha_i = \sum \left| \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k} \right|$ حيث يؤُخذ المجموع على جميع المجموعات الجزئية الممكنة $\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$.

مبرهنة(٢،١) (مبدأ التضمين و الإقصاء)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$$

البرهان

ليكن $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. عند حساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ فإن x يعد مرة واحدة؛ و يختلف الأمر عند حساب كل من $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. سنثبت أن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي 1. نفرض أن x ينتمي فقط إلى المجموعات $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$. إذن إسهام x في حساب العدد

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ يساوي m. كذلك، إن إسهام x في حساب العدد

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ يساوي $\binom{m}{2}$ ؛ لأن

إسهام x في حساب $|A_i \cap A_j|$ يساوي 0 في حالة $\{i, j\} \not\subset \{j_1, \ldots, j_m\}$ و يساوي

1 في حالة $\{i, j\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}$. و بالمثل فإن إسهام x في حساب العدد α_i

يساوي $\binom{m}{i}$ لكل $1 \le i \le n$. إذن، إن إسهام x في حساب العدد

$\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$ ؛ لأن

$\binom{m}{i} = 0$ لكل $m < i \le n$. و لكن من نتيجة لمبرهنة ذات الحدين نعلم أن

$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1$ و هذا يتم البرهان ■

في كثير من المسائل، نحسب عدد العناصر التي لا تنتمي إلى أي من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مستخدمين النتيجة التالية لمبدأ التضمين و الإقصاء.

نتيجة(٢،١)

إذا كانت U مجموعة شاملة منتهية و كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، فإن

$$|U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$$

و الآن نستند إلى مبدأ التضمين و الإقصاء و نتيجته و نقدم مجموعة من البرهنات و الأمثلة المتنوعة.

مبرهنة(٢،٢)

إن عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$، حيث $m \geq n$، يساوي

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n-1} 1^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m$$

البرهان

لتكن U هي مجموعة التطبيقات من A إلى B. ضع $A_k = \{f \in U : b_k \notin R(f)\}$ لكل $1 \leq k \leq n$، حيث $R(f)$ ترمز إلى مدى f. إذاً المطلوب حساب العدد $|U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$. واضح أن $|U| = n^m$. الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B \setminus \{b_k\}$، و بالتالي فإن $|A_k| = (n-1)^m$ لكل $1 \leq k \leq n$. إذاً

$\alpha_1 = n(n-1)^m$. لحساب

نلاحظ أن $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$

$|A_i \cap A_j|$، حيث $1 \le i < j \le n$ ، يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B \setminus \{b_i, b_j\}$ ؛

و بالتالي فإن $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$. إذا $\alpha_2 = \binom{n}{2}(n-2)^m$ و بالمثل نجد أن

$\alpha_k = \binom{n}{k}(n-k)^m$ لكل $1 \le k \le n$. إذا

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$$
$$= |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$$
$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n-1} 1^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m$$

إذا كان $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ تبديلا، فإننا نقول إنه **تبديل تام** (derangement) إذا تحقق الشرط التالي: $f(i) \ne i$ لكل $1 \le i \le n$. نرمز لزمرة تناظر المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بالرمز S_n و لعدد تبديلاتها التامة بالرمز d_n.

مثال(١،٢)

إن عدد التبديلات التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

البرهان

ضع $U = S_n$، و لكل $1 \le k \le n$ ضع $A_k = \{f \in S_n : f(k) = k\}$. إذا المطلوب حساب العدد $|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$. نعلم أن $|U| = |S_n| = n!$. الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد تبديلات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}$، و بالتالي فإن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \le k \le n$. إذا $\alpha_1 = n((n-1)!) = \frac{n!}{1!}$. لحساب $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ نلاحظ أن $|A_i \cap A_j|$، حيث $1 \le i < j \le n$، يساوي عدد تبديلات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i, j\}$، و بالتالي فإن $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. إذا $\alpha_2 = \binom{n}{2}((n-2)!) = \frac{n!}{2!}$. و بالمثل نجد أن $\alpha_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$ لكل $1 \le k \le n$. إذا

$$
\begin{aligned}
&|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \\
&= |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n \\
&n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن $\frac{d_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx e^{-1} \approx 0.368$ من أجل قيم n الكبيرة. أي، إن عدد التبديلات التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي $\frac{1}{3}$ عدد تبديلاتها تقريبا.

مثال(٢،٢)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ خال من التعاقب إذا حقق الشرط التالي:

$f(j+1) \neq f(j)+1$ لكل $1 \leq j < n$. نريد حساب عدد التبديلات الخالية من التعاقب، و الذي نرمز له بالرمز q_n. لأجل ذلك ضع $U = S_n$، و لكل $1 \leq k < n$ ضع A_k هي مجموعة التباديل $f \in S_n$ التي تحقق $f(j) = k, f(j+1) = k+1$ لإحدى قيم $1 \leq j < n$.

إذا المطلوب حساب العدد $q_n = |U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})|$. و ابتغاء للسهولة، نستخدم الآن لغة الأنساق للحديث عن التبديلات. نلاحظ أن تبديلا ما ينتمي إلى المجموعة A_1 إذا وفقط إذا كان يحتوي على النسق 12. و بالتالي فإنه يوجد تقابل من A_1 إلى مجموعة تبديلات مجموعة الرموز $\{12,3,4,\ldots,n\}$. إذا $|A_1| = (n-1)!$. بالمثل نجد أن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \leq k < n$. و هكذا فإن $\alpha_1 = (n-1)((n-1)!)$. الآن، نحسب

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1}|$. نلاحظ أنه إذا كان $f \in A_1 \cap A_2$ فإن f يحتوي على النسقين 23 و 12؛ أما إذا كان $f \in A_1 \cap A_3$ فإن f يحتوي على النسقين 34 و 12. في الحالة الأولى يحتوي النسقان 23 و 12 على العنصر المشترك 2، و بالتالي فإن كل $f \in A_1 \cap A_2$ يحتوي على النسق 123. إذا $|A_1 \cap A_2|$ يساوي عدد تبديلات المجموعة $\{123,4,5,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$. و في الحالة الثانية لا يحتوي النسقان 34 و 12 على أي عنصر مشترك. إذا $|A_1 \cap A_3|$ يساوي عدد تبديلات المجموعة $\{12,34,5,6,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_3| = (n-2)!$. و بالمثل نجد أن

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ لكل $1 \le i < j < n-1$. و بالتالي فإن

$\alpha_2 = \binom{n-1}{2}((n-2)!)$. و بشكل عام نجد أن $\alpha_k = \binom{n-1}{k}((n-k)!)$ لكل $1 \le k \le n-1$. إذا

$$q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

ولكن

$$\binom{n-1}{k}(n-k)! = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\cdot(n-k)! = (n-1)!\frac{n-k}{k!}$$

إذا

$$q_n = n! - (n-1)!\frac{n-1}{1!} + (n-1)!\frac{n-2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= (n-1)!\left[n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

$$= (n-1)!\left[n - \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} - \frac{n}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!} + (-1)^n\frac{n}{n!}\right] +$$

$$(n-1)!\left[\frac{1}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)!} - (-1)^n\frac{n}{n!}\right]$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right] + (n-1)!\left[1 - \frac{1}{1!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

$$= d_n + d_{n-1}$$

و نلاحظ أن

$$\frac{q_n}{n!} = \frac{d_n}{n!} + \frac{d_{n-1}}{n!} = \frac{d_n}{n!} + \frac{1}{n}\cdot\frac{d_{n-1}}{(n-1)!} \approx \frac{1}{e} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{e} = \frac{n+1}{en}$$

مثال(٣،٢)

جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث $1 \le x \le 500$، 5 لا يقسم x، 6 لا يقسم x، 8 لا يقسم x.

الحل:

ضع $U = \{1,2,\ldots,500\}$ وضع $A_1 = \{x \in U : 5 | x\}$ و $A_2 = \{x \in U : 6 | x\}$ و $A_3 = \{x \in U : 8 | x\}$ فيكون المطلوب حساب العدد $|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$. نلاحظ أن $|A_1| = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100$ ، $|A_2| = \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 83$ ، $|A_3| = \left\lfloor \frac{500}{8} \right\rfloor = 62$. و كما هو معلوم فإن $a|n$ و $b|n$ إذا وفقط إذا كان $lcm(a,b)|n$ ؛ لذلك نجد أن

$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor = 16$ ، $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{40} \right\rfloor = 12$ ،

$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{24} \right\rfloor = 20$ ، $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{120} \right\rfloor = 4$. و بالتالي فإن

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

$$= 500 - (100 + 83 + 62) + (16 + 12 + 20) - 4 = 299$$

مثال(٤،٢)

أحسب $\varphi(40)$. أي، احسب قيمة دالة أويلر φ عند العدد 40.

الحل:

نلاحظ أن $40=(2^3)(5)$ و نضع $U=\{1,2,\dots,40\}$ ، $A_1=\{x\in U:2|x\}$ و $A_2=\{x\in U:5|x\}$. إذا

$$\phi(40)=|U|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$
$$=40-\left(\left\lfloor\frac{40}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{40}{5}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{40}{10}\right\rfloor$$
$$=40-(20+8)+4=16$$

و هكذا يمكن حساب $\varphi(n)$ عندما نعلم تحليل n إلى عوامله الأولية.

مثال(٥،٢)

جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=13$ بحيث $0\le X_1\le 6$ ، $0\le X_2\le 9$ ، $0\le X_3\le 3$.

الحل: نفرض أن U مجموعة الحلول بحيث $X_i\ge 0$ لكل $1\le i\le 3$ ، و أن A_1 مجموعة الحلول بحيث $X_1\ge 7$ ، $X_2\ge 0$ ، $X_3\ge 0$ ، و أن A_2 مجموعة الحلول بحيث $X_1\ge 0$ ، $X_2\ge 10$ ، $X_3\ge 0$ ، و أن A_3 مجموعة الحلول بحيث $X_1\ge 0$ ، $X_2\ge 0$ ، $X_3\ge 4$. إذا المطلوب حساب العدد $|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|$.

واضح أن $|U|=\binom{13+3-1}{13}=105$. و بالمثل نجد أن

$|A_1|=\binom{13-7+3-1}{13-7}=28$ ، $|A_2|=\binom{13-10+3-1}{13-10}=10$ ،

$|A_3| = \binom{13-4+3-1}{13-4} = 55$ ، $|A_1 \cap A_2| = 0$ ،

$|A_1 \cap A_3| = \binom{13-7-4+3-1}{13-7-4} = 6$ ، $|A_2 \cap A_3| = 0$ ، $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

و بالتالي فإن

$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 105 - (28 + 10 + 55) + (0 + 6 + 0) - 0 = 18$.

ينتج من تعريف اتحاد المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن مبدأ التضمين و الإقصاء يعين عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى واحدة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. و للحصول على تعميمين بسيطين لهذا المبدأ، نرمز لعدد العناصر التي تنتمي بالضبط إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بالرمز e_m ، كما نستخدم الرمز l_m للدلالة على عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. المبرهنة التالية تعطينا التعميمين المطلوبين.

مبرهنة(٣،٢)

(أ) $$e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \binom{m+2}{m}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n$$

(ب) $$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \binom{m+1}{m-1}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

البرهان

(أ) ليكن $x \in U$ ، حيث U المجموعة الشاملة. نفرض أن x ينتمي بالضبط إلى r مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. إذا كان $r < m$ فإن إسهام x في حساب كل من الأعداد $e_m, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0 و بالتالي فإن إسهام x في حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 0. و إذا كان $r = m$ فإن إسهام x في حساب كل من العددين e_m, α_m يساوي 1 و إن إسهام x في حساب كل من $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0 ؛ و بالتالي فإن إسهام x في حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 1. أخيراً، نفرض أن $m < r \le n$. نلاحظ أن إسهام x في حساب e_m يساوي 0 ؛ كما أن إسهام x في حساب الأعداد $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_n$ يساوي $\binom{r}{m}, \binom{r}{m+1}, \ldots, \binom{r}{r}, 0, \ldots, 0$ على الترتيب. إذاً يجب إثبات أن إسهام x في حساب الطرف الأيمن للمعادلة يساوي 0. أي يجب إثبات أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} = 0$$

باستخدام العلاقة $\binom{r}{k}\binom{k}{t} = \binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}$ نجد أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} =$$
$$= \binom{r}{m} - \binom{r}{m}\binom{r-m}{1} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}$$

$$=\binom{r}{m}\left[1-\binom{r-m}{1}+\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right]=\binom{r}{m}(1+(-1))^{r-m}=0$$

(ب) نلاحظ أولاً أن $l_m = e_m + l_{m+1}$ ، $l_n = e_n$ و بالتالي فإن

$l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$. من ناحية أخرى، من التمرين ١٦ في تمارين(٢،١) نجد العلاقة

$$\binom{r}{k}-\binom{r}{k+1}+\binom{r}{k+2}-\binom{r}{k+3}+\cdots+(-1)^{r-k}\binom{r}{r}=\binom{r-1}{k-1}$$

التي تبسط لنا صيغة $l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$ الناتجة من (أ) إلى الشكل

$$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

مثال(٢،٦)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ يثبت العنصر $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ عندما يكون $f(x) = x$.

نستخدم الرمز $d_{n,m}$ للدلالة على عدد التبديلات $f \in S_n$ التي تثبت بالضبط m عنصرا من العناصر $1,2,\ldots,n$. واضح أن $d_{n,m} = \binom{n}{m} d_{n-m}$ ؛ لأنه إذا كان f يثبت بالضبط m عنصرا فلا بد أن يصاحبه تبديل تام لـ $n-m$ عنصرا. نريد حساب $d_{n,m}$ باستخدام (أ) من المبرهنة(٢،٣) و النقاش المتضمن في المثال(٢،١). نجد أن

$$d_{n,m} = e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n$$

$$=\binom{n}{m}(n-m)!-\binom{m+1}{m}\binom{n}{m+1}(n-m-1)!+\cdots+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}$$
$$=\binom{n}{m}\left[(n-m)!-\binom{n-m}{1}(n-m-1)!+\cdots+(-1)^{n-m}\right]=\binom{n}{m}d_{n-m}$$

مثال(٢،٧)

أثبت بطريقة تركيبية أن $n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$.

الحل:

نفرض أن $U=\{x_1x_2\ldots x_n : x_i\in\{0,1\}\ for\ all\ i=1,2,\ldots,n\}$ و لكل $i=1,2,\ldots,n$ نفرض أن $A_i=\{x_1x_2\ldots x_n\in U : x_i=0\}$. نحسب عدد المتتاليات التي تحتوي بالضبط على 0 واحد. أولا، لكل $i=1,2,\ldots,n$ توجد متتالية واحدة بحيث يكون 0 حدها رقم i بينما تكون حدودها الأخرى 1. إذا عدد المتتاليات المطلوبة يساوي n. ثانيا، حسب (أ) من المبرهنة (٢،٣) فإن عدد هذه المتتاليات يساوي

$$e_1=\alpha_1-\binom{2}{1}\alpha_2+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

إذا $$n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

و نلاحظ أنه يمكن الحصول على العلاقة السابقة بطريقة غير تركيبية كما يلي:

من مبرهنة ذات الحدين نجد أن

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 2^{n-k}$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نجد أن

$$n(x+2)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} 2^{n-k}$$

و عندما يكون $x = -1$ نحصل على

$$n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k (-1)^{k-1} 2^{n-k}$$

تمارين

١- أظهر استعراض لتسجيل 100 من الطلاب أن 32 طالبا مسجلون في المقرر أ، 44 طالبا مسجلون في المقرر ب، 47 طالبا مسجلون في المقرر ج، 11 طالبا مسجلون في المقررين ب و ج، 12 طالبا مسجلون في المقررين أ و ج، 12 طالبا مسجلون في المقررين أ و ب، و أن 3 طلاب مسجلون في المقررات الثلاثة. جد عدد الطلاب غير المسجلين في المقررات الثلاثة.

٢- أجريت اختبارات على 200 عينة من المياه الجوفية بهدف البحث عن وجود الأملاح أ، ب، ج فيها. فوجد أن 14 عينة تحتوي على الملح أ، 10 عينات تحتوي على الملح ب، 8 عينات تحتوي على الملح ج، 6 عينات تحتوي على

اللحين أ و ب، 6 عينات تحتوي على اللحين ب و ج، 4 عينات تحتوي على اللحين أ و ج، و عينتان تحتويان على اللحين أ و ب و لا تحتويان على الملح ج. جد عدد العينات التي تحتوي على الأقل على واحد من الأملاح الثلاثة.

٣-

(أ) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تجعل كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي و تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

(ب) ما هو عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تجعل بالضبط 4 أعداد في أماكنها الطبيعية؟

(ج) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٤- جد عدد تبديلات $1,2,\ldots,n$ التي تجعل كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي و تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٥- جد عدد تبديلات $1,2,\ldots,n$ التي تجعل بالضبط k عددا في أماكنها الطبيعية.

٦- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 10$ لكل $i = 1,2,\ldots,5$.

(ب) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,\ldots,5$.

٧- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 30$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ب) $-10 \le X_i \le 20$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ج) $0 \le X_4 \le 18$ ، $0 \le X_3 \le 15$ ، $0 \le X_2 \le 9$ ، $0 \le X_1 \le 6$.

٨- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ بحيث يكون $5 \le X_1 < 11$ ، $6 < X_2 \le 14$ ، $10 \le X_3 \le 24$.

٩- إذا كانت $A = \{1,2,\ldots,999999\}$ ، فما هو عدد الأعداد التي تنتمي إلى A و التي مجموع أرقام كل منها يساوي 15؟

١٠- جد عدد المجموعات المضاعفة من السعة 15 المأخوذة من المجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ بحيث يكون تكرار a_1 أصغر من 5 ، تكرار a_2 أصغر من 7 ، تكرار a_3 أصغر من 6.

١١- جد عدد الأعداد الصحيحة n ، $1 \le n \le 2000$ ، بحيث

(أ) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n$. (ب) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 \nmid n$. (ج) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 | n$.

١٢- جد عدد تبديلات الحروف $a, b, c, \ldots, x, y, z$ التي لا تحتوي على أي من الأنساق path, train, time.

١٣- جد عدد تبديلات حروف الكلمة equation التي لا تثبت أي حرف من حروف العلة a, e, i, o, u.

١٤- (أ) أحسب d_3, d_4, d_5.

(ب) إذا كان 11660 يساوي عدد التبديلات التامة للأعداد $1,2,\dots,n$ التي تظهر فيها الأعداد 1,2,3,4,5 في المواضع الخمسة الأولى من التبديل التام، فجد n.

١٥- إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ حيث كل من p_1 و p_2 عدد أولي، فأثبت أن $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$ ثم احسب $\varphi(135)$.

١٦- إذا رميت 8 أحجار نرد مختلفة فجد احتمال أن تظهر جميع الأعداد 1,2,3,4,5,6.

١٧- جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,c,c,c بحيث

(أ) لا تكون أي 3 حروف متعاقبة من النوع نفسه.

(ب) لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

١٨- جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,b,c,c بحيث لا تكون الحروف من النوع نفسه متعاقبة.

١٩- جد عدد ترتيبات الحروف $a, a, b, b, c, c, d, d, d$ بحيث لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

٢٠- جد عدد ترتيبات حروف الكلمة INTELLIGENT بحيث

(أ) يوجد زوج واحد على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ب) يوجد زوجان على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ج) يوجد زوجان بالضبط من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

٢١- جد عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n صندوقا مختلفا، $r \geq n$، بحيث لا يكون أي من الصناديق خاليا.

٢٢- استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات مبدأ التضمين و الإقصاء.

٢٣- استخدم نوعا من الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات العلاقة المعطاة في (ب) من المبرهنة (٣، ٢)، كما يلي:

(أ) لاحظ أن $l_n = e_n = \alpha_n$

(ب) لاحظ أن $l_{n-1} = e_{n-1} + l_n$

(ج) أثبت أن $l_{n-1} = \alpha_{n-1} - \binom{n-1}{n-2}\alpha_n$

(د) لكل $1 \leq r \leq n-1$، لاحظ أن $l_{r-1} = e_{r-1} + l_r$

(هـ) استخدم الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات المطلوب.

الفصل الثالث

الـدوال المـولِّـدة

GENERATING FUNCTIONS

يبرز هذا الفصل ترابط فروع علم الرياضيات، حيث نستخدم خواص كثيرات الحدود الجبرية و خواص المتسلسلات التحليلية لحل بعض مسائل العد.

(٣،١) مقدمة

يُختزل الكثير من مسائل العد إلى مسألة إيجاد الحد العام a_n لمتتالية (a_n) من الشكل $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ و تعتبر طريقة الدوال المولِّدة إحدى الطرائق الفعّالة لإيجاد a_n حيث نجد دالة مولدة للمتتالية (a_n) ثم نستخرج a_n منها.

تعرف **الدالة المولدة العادية** (ordinary generating function) $g(x)$ للمتتالية (a_n) بأنها متسلسلة القوى الشكلية (formal power series)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

وتُعرَّف **الدالة المولدة الأسية** (exponential generating function) $h(x)$ للمتتالية (a_n) بأنها المتسلسلة

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

الدالة المولدة العادية $g(x)$ للمتتالية (2^n) هي

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$$

و يمكن الوصول إلى كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ الذي يسمى **صيغة مختصرة** (closed form formula) لـ $g(x)$ من خلال منظورين مختلفين. الأول لا يتعلق بالدوال و تقارب المتسلسلات حيث ننظر إلى $\dfrac{1}{1-2x}$ على أنها النظير الضربي $(1-2x)^{-1}$ لمتسلسلة القوى الشكلية $1-2x$ في حلقة متسلسلات القوى الشكلية $C[[x]]$ على حقل الأعداد المركبة C . أما الثاني فنرى من خلاله $\dfrac{1}{1-2x}$ على أنها دالة ممثلة بمتسلسلة القوى $1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$ عندما $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

و توخيا للسهولة فإننا سنعتمد المقاربة الثانية لتقديم الدوال المولدة. و يستطيع القارئ أن يعود إلى أحد كتب حساب التفاضل و التكامل لمراجعة موضوع متسلسلات القوى و تمثيل الدوال بها.

مثال(١،٣)

جد الدالة المولدة العادية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل:

$$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$$

مثال(٢،٣)

جد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل:

$$h(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

و من هنا جاء استخدام كلمة "أسية" في التعريف.

ملاحظات

فيما يلي سنستخدم الاصطلاحات التالية:

١- نستخدم عبارة "الدالة المولدة" بدلا من "الدالة المولدة العادية".

٢- نستخدم عبارة "المولدة لـ a_n" بدلا من "المولدة لـلمتتالية (a_n)".

٣- إذا كان نص المسألة لا يحتوي صراحة أو ضمنا على متتالية و استخدمنا عبارة "جد الدالة المولدة لـ ..." فإننا نقصد بذلك تعميم المسألة بحيث تحتوي على متتالية يكون حل المسألة الأصلية أحد حدودها.

(٢،٣) الدوال المولدة العادية

مثال(٣،٣)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 = r$ إذا كانت $0 \le X_1 \le 1$ و $1 \le X_2 \le 2$.

الحل: من الجدول أدناه يتضح أنه يوجد حل واحد إذا كانت $r = 1$ أو $r = 3$ و حلان إذا كانت $r = 2$.

X_1	X_2	$X_1 + X_2$
0	1	1
0	2	2
1	1	2
1	2	3

مثال(٣،٤)

أوجد مفكوك $(x^0 + x^1)(x^1 + x^2)$

الحل:

$$(x^0+x^1)(x^1+x^2)=x^0(x^1+x^2)+x^1(x^1+x^2)$$
$$=x^0x^1+x^0x^2+x^1x^1+x^1x^2=x^{0+1}+x^{0+2}+x^{1+1}+x^{1+2}$$
$$=x^1+x^2+x^2+x^3=x^1+2x^2+x^3$$

لاحظ أن معامل x^1,x^2,x^3 في مفكوك $(x^0+x^1)(x^1+x^2)$ يساوي عدد حلول المعادلة في المثال(٣،٣) عندما $r=1,r=2,r=3$ على الترتيب. و يمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣،١)

ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r$$
$$X_i=\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\ldots \quad \text{لكل} \quad i=1,2,\ldots,n$$

إن الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x)=(x^{\alpha_{1,1}}+x^{\alpha_{1,2}}+\cdots)(x^{\alpha_{2,1}}+x^{\alpha_{2,2}}+\cdots)\cdots(x^{\alpha_{n,1}}+x^{\alpha_{n,2}}+\cdots)$$

البرهان

إن حدا نمطيا في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط و تجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_n}$ حيث الحد x^{α_i} مأخوذ من العامل

$(x^{\alpha_{i,1}} + x^{\alpha_{i,2}} + \cdots)$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. و بعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$. و للحصول على x^r لا بد أن يكون $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = r$. أي، لا بد أن يكون $X_1 = \alpha_1,\ X_2 = \alpha_2, \ldots, X_n = \alpha_n$ حلا للمسألة المعطاة. و بالتالي فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. إذا $g(x)$ هي الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r) ■

نتيجة(٣،١)

لكل عدد صحيح $n \geq 1$ فإن

$$(1-x)^{-n} = (1 + x + x^2 + \cdots)^n$$
$$= \binom{n-1+0}{0} + \binom{n-1+1}{1}x + \cdots + \binom{n-1+k}{k}x^k + \cdots$$

البرهان: $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ هي الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k$. ومن النتيجة(١،١٠) فإن معامل x^k في $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ هو $\binom{n-1+k}{k}$ ■

مثال(٣،٥)

أوجد الدالة المولدة لعدد المجموعات الجزئية من السعة r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

الحل: المتتالية (a_r) هي $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n},0,0,\cdots$ و عليه فإن الدالة المولدة هي

$$g(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

مثال(٣،٦)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$.

الحل: لكل $1\le i\le 4$ ضع $Y_i=iX_i$. ومنه $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$. أي أن الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$ هي نفسها الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$ حيث

$Y_1=0,1,2,\ldots,k,\ldots$ و $Y_2=0,2,4,\ldots,2k,\ldots$ و $Y_3=0,3,6,\ldots,3k,\ldots$ و $Y_4=0,4,8,\ldots,4k,\ldots$. من المبرهنة(٣،١)، الدالة المولدة هي

$$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

مثال(٣،٧)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=10$ إذا كان $X_i=0,2,4,\cdots$ لكل $i=1,2,3$.

الحل: من المبرهنة(١، ٣)، الدالة المولدة هي $g(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^3$.

مثال(٣،٨)

أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار أربعة أعداد غير متعاقبة من بين الأعداد $1,2,\ldots,n$.

الحل: افرض أن $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \leq n$ أعدادا غير متعاقبة. لتكن

$$X_1 = n_1, X_2 = n_2 - n_1, X_3 = n_3 - n_2, X_4 = n_4 - n_3, X_5 = n - n_4$$

لاحظ أن $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$. كذلك $X_1 \geq 1$ و $X_5 \geq 0$. بما أن الأعداد غير متعاقبة فإن $X_i \geq 2$ لكل $2 \leq i \leq 4$. عليه، أي حل صحيح للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$ بحيث $X_1 \geq 1$ و $X_5 \geq 0$ و $X_i \geq 2$ لكل $2 \leq i \leq 4$ يعطي أربعة أعداد غير متعاقبة و العكس صحيح. من المبرهنة(١، ٣)، الدالة المولدة هي $g(x) = (x + x^2 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots)^3 (1 + x + x^2 + \cdots)$.

إن استخراج a_r من الدالة المولدة $g(x)$ يتطلب أحيانا إيجاد مفكوك عبارات من الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ و من الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n$. وهذا ما تفصله المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣،٢)

لكل عدد صحيح $n \ge 0$ فإن:

(أ) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$

(ب) $(1-x^m)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{rm}$

(ج) $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$

(د) $(1+x+x^2+\cdots)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{r} x^r$

(هـ) $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n (1-x)^{-n}$

(و) $(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r)(\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r) = \sum_{r=0}^{\infty} (a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \cdots + a_r b_0) x^r$

البرهان

باستخدام مبرهنة ذات الحدين نحصل بسهولة على كل من (أ) و (ب). و تم إثبات (د) في النتيجة(٣،١) وبعد المبرهنة(١،٥) مباشرة و أما (و) فهي تعريف حاصل ضرب متسلسلتي قوى. و أخيرا فإن $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}) = 1-x^m$ تؤدي إلى (هـ) ■

مثال(٣،٩)

أوجد معامل x^{20} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3$.

الحل:

$$= (x^3 + x^4 + \cdots)^3 = (x^3(1 + x + x^2 + \cdots))^3 = x^9(1 + x + x^2 + \cdots)^3 = x^9(1-x)^{-3}$$

$$= x^9\left\{\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \cdots + \binom{3-1+k}{k}x^k + \cdots\right\}$$

ومنه معامل x^{20} يساوي

$$\binom{3-1+11}{11} = \binom{13}{11} = \binom{13}{2} = 78$$

مثال(٣،١٠)

أوجد معامل x^9 في مفكوك $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$.

الحل:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

$$= (1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$= \left\{\binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right\}\left\{\binom{4-1+0}{0} + \binom{4-1+1}{1}x + \cdots\right\}$$

و منه معامل x^9 يساوي

$$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9}-\binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}=\binom{12}{9}-4\binom{6}{3}=220-80=140$$

مثال(٣،١١)

جد عدد طرق الحصول على المجموع 9 عند رمي ثلاثة أحجار نرد مختلفة.

الحل: لكل $i=1,2,3$ ليكن X_i هو العدد الذي يظهر على الحجر رقم i. عليه، العدد المطلوب هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=9$ بحيث $1\le X_i\le 6$. ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=r$ بحيث $1\le X_i\le 6$. من المبرهنة(٣،١)، الدالة المولدة للمتتالية (a_r) هي $g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$. و بالتالي فإن العدد المطلوب هو a_9 و يمكن حسابه كما يلي:

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3\\
&=x^3(1+x+\cdots+x^5)^3\\
&=x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3=x^3\frac{(1-x^6)^3}{(1-x)^3}\\
&=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}\\
&=x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3-1+r}{r}x^r\\
&=(x^3-3x^9+3x^{15}-x^{21})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{r}x^r
\end{aligned}$$

و منه

$$a_9 = \binom{6+2}{6} - 3\binom{0+2}{0} = \binom{8}{6} - 3\binom{2}{0} = 28 - 3 = 25$$

مثال(٣،١٢)

جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 20$ بحيث $X_i \geq 0$ **لكل** $i = 1,2,3$.

الحل: لنضع $Y_3 = 5X_3$ و $Y_2 = 2X_2$ و $Y_1 = X_1$. فيكون العدد المطلوب هو عدد الحلول للمسألة

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 20$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

إذا المطلوب هو c_{20} حيث c_r هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = r$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

و لهذا الغرض نفرض أن $g(x)=\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^r$ هي الدالة المولدة العادية للمتتالية (c_r).

بالاستناد إلى المبرهنة(١، ٣) نجد أن

$$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

إذا $\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^r=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$

ضع $\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^r=\dfrac{1}{(1-x)}$ و $\sum_{r=0}^{\infty}b_rx^r=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$

عندئذ $a_r=1$ لكل $r=0,1,2,\ldots$ ، $(1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty}b_rx^r=\dfrac{1}{(1-x)}$ ،

$$(1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^r=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

إذا $\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^r=(1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty}b_rx^r$ ، $\sum_{r=0}^{\infty}b_rx^r=(1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^r$

و بالتالي فإن

$b_r=a_r+b_{r-2}=1+b_{r-2}$ لكل $r\geq 0$ ، $c_r=b_r+c_{r-5}$ لكل $r\geq 0$

حيث $b_r=c_r=0$ عندما يكون $r<0$.

و بالحساب المباشر نجد أن

$$b_0=1,\ b_5=3,\ b_{10}=6,\ b_{15}=8,\ b_{20}=11$$

و منه فإن

$$c_0=1,\ c_5=4,\ c_{10}=10,\ c_{15}=18,\ c_{20}=29$$

و بالتالي فإن عدد حلول المسألة المعطاة هو $c_{20}=29$.

لكل عدد صحيح $n \geq 0$ ، ليكن p_n هو عدد تجزئات n و $p_0 = 1$ اصطلاحا. تزودنا المبرهنة التالية بالدالة المولدة للمتتالية (p_n) ؛ و الجدير بالذكر أنه لا توجد طريقة سهلة معروفة لاستخراج p_n من هذه الدالة.

مبرهنة(٣،٣)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n) فإنه يمكن كتابة $g(x)$ على شكل حاصل الضرب اللانهائي $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$.

البرهان

لأي تجزئة للعدد n و لكل $1 \leq i \leq n$ ، ليكن X_i هو عدد مرات ظهور العدد i في تلك التجزئة. إذا $1X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n = n$ حيث $X_i \geq 0$ عدد صحيح لكل $1 \leq i \leq n$. وبوضع $Y_i = iX_i$ لكل $1 \leq i \leq n$. نجد أن p_n يساوي عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = n$ حيث $Y_i = o, i, 2i, \ldots$ لكل $1 \leq i \leq n$.

و بتطبيق المبرهنة(١،٣) نجد أن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$.

ومن الناحية الأخرى، لحساب معامل x^n في مفكوك $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$ فإننا نهمل العوامل

$$(1-x^k)^{-1} = \frac{1}{1-x^k} = (1 + x^k + x^{2k} + \cdots)$$

حيث $k>n$ ، و بالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$. و هكذا فإن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $g(x)$. إذا $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n) ■

لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ، ليكن e_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و عددها زوجي و ليكن o_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و عددها فردي.

مثال(٣،١٣)

إذا كان $q_n = e_n - o_n$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ، و $q_o = 1$ فإنه يمكن كتابة الدالة المولدة للمتتالية (q_n) على الشكل

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$$

البرهان: نجد بسهولة أن $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث a_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و $a_0 = 1$ (أنظر التمرين ٣٠ في نهاية هذا البند). و لحساب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ فإننا نهمل العوامل $(1-x^k)$ حيث $k > n$. وبالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)$.

نلاحظ أن كل تجزئة للعدد n بحيث تكون أجزاؤها مختلفة و عددها r تساهم بالعدد $(-1)^r$ في معامل x^n. فمثلا التجزئة $13 = 1 + 3 + 4 + 5$ تقابل الحد $(-x)(-x^3)(-x^4)(-x^5)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^4$

في معامل x^{13} ؛ أما التجزئة $13 = 2 + 4 + 7$ فإنها تقابل الحد $(-x^2)(-x^4)(-x^7)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^3$ في معامل x^{13}. و لما كان $(-1)^m = 1$ لكل عدد زوجي m و $(-1)^t = -1$ لكل عدد فردي t فإنه ينتج أن معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ يساوي $e_n - o_n$.

مبرهنة(٤،٣)

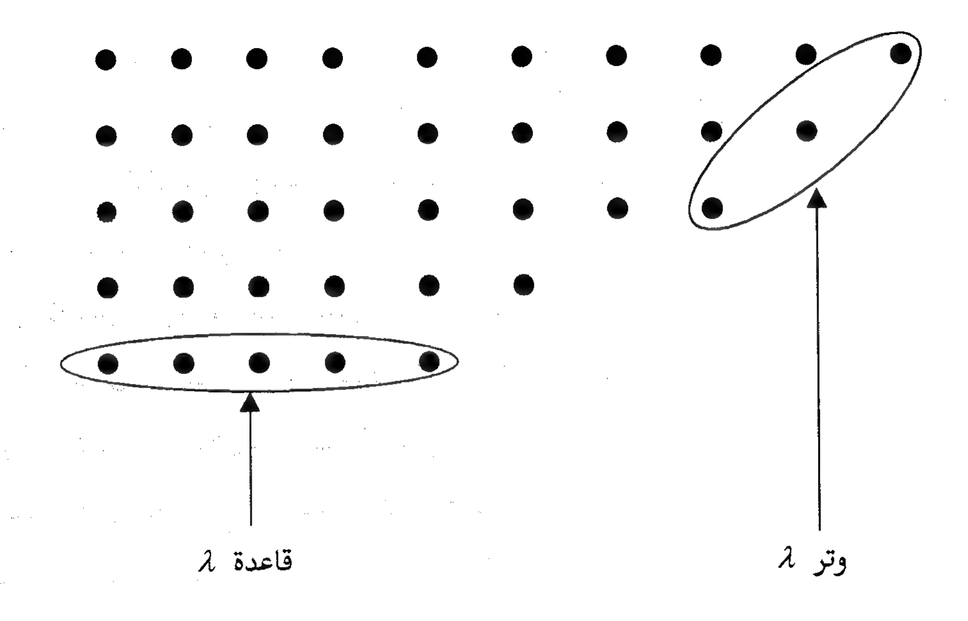
لكل عدد صحيح موجب n فإن

$$e_n - o_n = \begin{cases} (-1)^k & , n = \frac{k(3k \mp 1)}{2} \\ 0 & , n \neq \frac{k(3k \mp 1)}{2} \end{cases}$$

حيث k عدد صحيح موجب.

البرهان

لتكن S هي مجموعة تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة. إذا كانت $\lambda \in S$ و كان F هو شكل فيرير المصاحب لـ λ فإننا نستخدم الرمز $b(\lambda)$ للدلالة على أصغر أجزاء λ و نسمي السطر المقابل لـ $b(\lambda)$ في F قاعدة λ ؛ كما نستخدم الرمز $h(\lambda)$ للدلالة على طول أطول متتالية متناقصة حدودها أعداد صحيحة متعاقبة و حدها الأول هو أكبر أجزاء λ و حدودها الأخرى أجزاء لـ λ و نسمي الخط المكون من النقاط الأخيرة في الأسطر المقابلة لحدود هذه المتتالية في F وتر λ. فمثلا إذا كانت λ هي التجزئة $5 + 6 + 8 + 9 + 10$ فإن $b(\lambda) = 5$ و $h(\lambda) = 3$ ويوضح الشكل التالي كلا من وتر λ وقاعدة λ :



الآن، نعرف العمليتين B و H على أشكال فيرير كما يلي:

أولا: إذا كان $b(\lambda) \leq h(\lambda)$ و كان تقاطع وتر λ و قاعدة λ خاليا أو إذا كان $b(\lambda) \leq h(\lambda) - 1$ و كان تقاطع وتر λ و قاعدة λ غير خال فإن العملية B تعني حذف قاعدة λ و توزيع نقاطها نقطة نقطة على الأسطر العليا لتكون وترا للشكل الناتج.

ثانيا: إذا كان $b(\lambda) > h(\lambda)$ و كان تقاطع وتر λ و قاعدة λ خاليا أو إذا كان $b(\lambda) \geq h(\lambda) + 2$ و كان تقاطع وتر λ و قاعدة λ غير خال فإن العملية H تعني حذف وتر λ و إضافة نقاطه أسفل قاعدة λ لتكون قاعدة للشكل الناتج.

بما أن إجراء B يتطلب أن يكون $b(\lambda)\le h(\lambda)$ و إجراء H يتطلب أن يكون $b(\lambda)>h(\lambda)$ فإنه يمكن على الأكثر إجراء إحدى العمليتين B و H على أي شكل F من أشكال فيرير. ويمكن التحقق بسهولة من أنه إذا كان إجراء B على الشكل F ممكناً و يعطي الشكل F' فإن إجراء H على F' ممكن و يعطي F. وبالمثل إذا كان إجراء H على الشكل F ممكناً و يعطي الشكل F'' فإن إجراء B على F'' ممكن و يعطي F. ولما كانت كلّ من B و H تغير عدد الأجزاء بواحد فإن B و H تحدثان تقابلاً بين مجموعة التجزئات التي أجزاؤها مختلفة وعددها زوجي و مجموعة التجزئات التي أجزاؤها مختلفة وعددها فردي كلما كان إجراء B و H ممكنا. و بالتالي فإن $e_n - o_n = 0$ في هذه الحالة.

إذا كان $b(\lambda)\le h(\lambda)$ فإنه لا يمكن إجراء H في حالة واحدة فقط و ذلك عندما يكون تقاطع وتر λ و قاعدة λ غير خالٍ و $b(\lambda)=h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda)=h(\lambda)=k$. إذاً

$$\begin{aligned} n &= k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(2k-1) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} \end{aligned}$$

إذا كان $b(\lambda)>h(\lambda)$ فإنه لا يمكن إجراء B في حالة واحدة فقط و ذلك عندما يكون تقاطع وتر λ و قاعدة λ غير خال و $b(\lambda)-1=h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda)-1=h(\lambda)=k$. إذا

$$\begin{aligned} n &= (k+1)+(k+2)+(k+3)+\cdots+2k \\ &= \frac{k(3k+1)}{2} \end{aligned}$$

وبملاحظة أنه لا يوجد عددين صحيحين موجبين k', k'' بحيث

$\frac{k''(3k''+1)}{2} = \frac{k'(3k'-1)}{2}$ فنجد أنه يمكن إحداث التقابل المذكور أعلاه بعد حذف

شكل واحد عدد أسطره k من أشكال فيرير عندما يكون $n = \frac{k(3k \mp 1)}{2}$. وبالتالي

فإن $e_n - o_n = (-1)^k$ في هذه الحالة.

و تنتج المتطابقة التالية مباشرة من المبرهنة(٣،٤) والمثال(٣،١٣).

مبرهنة(٣،٥)(متطابقة أويلر Euler's Identity)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{k(3k-1)/2}+x^{k(3k+1)/2})$$

وبالاستناد إلى متطابقة أويلر و المبرهنة(٣،٣) نحصل على المتطابقة

$$[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{k(3k-1)/2}+x^{k(3k+1)/2})][\sum_{r=0}^{\infty}p(r)x^r]=1$$

وبعد حساب معامل x^n ، $n \geq 1$ من الطرف الأيسر لهذه المتطابقة و مساواته بالصفر

نحصل على العلاقة الارتدادية

$$(*) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+$$
$$p(n-12)+p(n-15)-p(n-22)+p(n-26)+\cdots$$

التي يتكون طرفها الأيمن من عدد منته من الحدود $p(n-k)$ حيث $n-k \geq 0$.

ويمكن استخدام هذه العلاقة الارتدادية بفعالية لحساب $p(n)$ كما يوضح المثال التالي.

مثال(٣،١٤)

احسب $p(11)$.

الحل: $p(0)=1$ اصطلاحا، و بالحساب المباشر نجد أن

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ p(5)=7$$

الآن، نستخدم العلاقة الارتدادية (*) لإنشاء الجدول التالي الذي يبين أن $p(11)=56$.

n	6	7	8	9	10	11
$p(n-1)$	7	11	15	22	30	42
$p(n-2)$	5	7	11	15	22	30
$p(n-5)$	1	2	3	5	7	11
$p(n-7)$	–	1	1	2	3	5
$p(n)$	11	15	22	30	42	56

المبرهنة التالية تبين لنا كيف ننشئ دالة مولدة جديدة من دوال مولدة معطاة. ستظهر أهمية هذا الإنشاء في حل المسائل المتعلقة بإيجاد بعض المجاميع.

مبرهنة(٣،٦)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (b_n) فإن:

(أ) $\frac{g(x)}{1-x}$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

(ب) $C_1g(x)+C_2h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(C_1a_n+C_2b_n)$، حيث C_1, C_2 ثابتان.

(ج) $(1-x)g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n-a_{n-1}).

(د) $xg'(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (na_n)، حيث $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$.

(هـ) $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$ التي تسمى التفاف (convolution) المتتاليتين (a_n) و (b_n).

البرهان

يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. و فيما يلي نقدم برهانا للفقرة (د) على سبيل المثال.

بما أن $g(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ فإن $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. و بالتالي فإن

$$xg'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n.$$

مثال(٣،١٥)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (n^2).

الحل: الدالة المولدة للمتتالية (1) هي $\frac{1}{1-x}$ ومن فقرة (د) من المبرهنة(٦،٣) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n) هي

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

من فقرة (د) من المبرهنة(٦،٣) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n^2) هي

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\left[\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}\right] = x\left[\frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3}\right] = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

مثال(١٦،٣)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية $(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2)$. ثم جد $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

الحل: من المثال(١٥،٣) و باستخدام الفقرة (أ) من المبرهنة(٦،٣) تكون الدالة المولدة للمتتالية $(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2)$ هي

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = (x+x^2)(1-x)^{-4}$$

$$= (x+x^2)\left[\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\binom{4-1+2}{2}x^2+\cdots\right]$$

و منه معامل x^n يساوي

$$\binom{4-1+n-1}{n-1}+\binom{4-1+n-2}{n-2}=\binom{n+2}{n-1}+\binom{n+1}{n-2}=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمارين(٣،١)

١- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2,2,2,\cdots$.

٢- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2^0,2^1,2^2,\cdots$.

٣- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x^2+3x^3+\cdots)$.

٤- ما هي الدالة المولدة لعدد المتتاليات الثنائية من الطول r؟

٥- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r و المأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$؟

٦- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r و المأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ بحيث يظهر كل عنصر على الأقل مرة واحدة؟

٧- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4=r$ إذا كان $X_k>k$ لكل $k=1,2,3,4$.

٨- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=r$ إذا كانت X_1,X_3,X_5 أعدادا زوجية و X_2,X_4 أعدادا فردية.

٩- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = r$ حيث $X_1 + X_2 = 6$ و $X_k \geq 0$ لكل

$k = 1,2,\ldots,6$.

١٠- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $2X_1 + 3X_2 + 5X_3 = r$

إذا كان $X_k > k$ لكل $k = 1,2,3$.

١١- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n صندوقا مختلفا

بحيث لا يوجد صندوق خال وعدد الكرات فردي في كل صندوق.

١٢- أوجد الدالة المولدة لعدد الأعداد الصحيحة غير السالبة التي هي أصغر من مائة

ألف و مجموع أرقامها r.

١٣- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار 3 من الأعداد المختلفة من بين الأعداد

$1,2,\ldots,n$ بحيث لأي عددين x, y منها يكون $|x-y| > 2$. ثم اوجد عدد طرق

الأختيار في حالة $n = 30$.

١٤- وضح لماذا $(1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^3$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات

المضاعفة التي عدد عناصرها r و المأخوذة من المجموعة $\{x_1, x_2, x_3\}$؟ ما هي

الدالة المولدة الصحيحة؟

١٥- وضح لماذا $(1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^r$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات

المضاعفة التي عدد عناصرها r و المأخوذة من المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$؟

١٦- بين أن $g(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث

$a_n = \binom{2n}{n}$.

١٧- ما هو معامل x^5 في مفكوك $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^3 + \cdots)$؟

١٨- أوجد معامل x^{12} في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^3$.

١٩- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^{10}$.

٢٠- أوجد معامل x^{24} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots+x^{12})^4$.

٢١- أوجد معامل x^6 في مفكوك $(x+x^2+\cdots)^3(1-x^3)^3$.

٢٢- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3(x+x^2+\cdots+x^5)(1-x^5)^3$.

٢٣- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^2+x^3+\cdots)^3(x+x^2+x^3+x^4)(1-x^3)^3$.

٢٤- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1-x^2)^{12} \big/ (1-x)^3$.

٢٥- أوجد معامل x^r في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^r(1-x)^r$.

٢٦- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n=n(n-1)$.

٢٧- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n=n^2 3^n$.

٢٨- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في التمرين ٢٦ لإيجاد صيغة بسيطة لما يلي:

$2\times 1+3\times 2+\cdots+n(n-1)$.

٢٩- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في التمرين ٢٧ لإيجاد صيغة بسيطة لما يلي:

$3+2^2 3^2+\cdots+n^2 3^n$.

٣٠- لكل عدد صحيح $n\geq 0$، ليكن a_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و $a_0=1$. أثبت أنه يمكن كتابة الدالة المولدة للمتتالية (a_n) على الشكل

$g(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$.

(٣،٣) الدوال المولدة الأسية

تُعنى الدوال المولدة الأسية بعدد التباديل. في هذا البند سنستخدم بعض الخواص الجبرية والتحليلية لمتسلسلات القوى لإيجاد عدد التباديل.

مثال(٣،١٧)

كم عدد المتتاليات المأخوذة من المجموعة $\{A,B\}$ و التي تظهر فيها A مرة واحدة على الأكثر و عدد مرات ظهور B فيها إما 1 أو 2؟

الحل:

العدد	عدد مرات ظهور B	عدد مرات ظهور A
$\frac{1!}{0!1!}$	1	0
$\frac{2!}{0!2!}$	2	0
$\frac{2!}{1!1!}$	1	1
$\frac{3!}{1!2!}$	2	1

و منه فإن العدد المطلوب يساوي

$$\frac{1!}{0!1!}+\frac{2!}{0!2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{3!}{1!2!}=1+1+2+3=7$$

مثال(٣،١٨)

أوجد مفكوك $\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$

الحل:

$$g(x)=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)=\frac{x}{0!1!}+\left(\frac{1}{0!2!}+\frac{1}{1!1!}\right)x^2+\frac{x^3}{1!2!}$$

لاحظ أن معامل x^i في $g(x)$ مضروبا في $i!$ يساوي عدد المتتاليات من الطول i في المثال(٣،١٧) لكل $i=1,2,3$. يمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣،٧)

ليكن a_r هو عدد تباديل $r=r_1+r_2+\cdots+r_n$ شيئا مأخوذا من n نوعا من الأشياء بشرط أن عدد العناصر r_i المأخوذة من النوع i يحقق

$r_i=\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\ldots$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

إن الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x)=\left(\frac{x^{\alpha_{1,1}}}{\alpha_{1,1}!}+\frac{x^{\alpha_{1,2}}}{\alpha_{1,2}!}+\cdots\right)\left(\frac{x^{\alpha_{2,1}}}{\alpha_{2,1}!}+\frac{x^{\alpha_{2,2}}}{\alpha_{2,2}!}+\cdots\right)\cdots\left(\frac{x^{\alpha_{n,1}}}{\alpha_{n,1}!}+\frac{x^{\alpha_{n,2}}}{\alpha_{n,2}!}+\cdots\right)$$

البرهان

إن حدا نمطيا في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط و تجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب

$$\frac{x^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdot\frac{x^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{x^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

حيث الحد $\frac{x^{\alpha_i}}{\alpha_i!}$ مأخوذ من العامل $(\frac{x^{\alpha_{i,1}}}{\alpha_{i,1}!}+\frac{x^{\alpha_{i,2}}}{\alpha_{i,2}!}+\cdots)$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. و بعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ و للحصول على $x^r\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ لا بد أن يكون $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$ و بالتالي فإن معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي $\sum\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ حيث المجموع مأخوذ على جميع العديدات $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ من النوع n التي تحقق $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$ و تحقق $\alpha_i\in\{\alpha_{i,1},\alpha_{i,2,\ldots}\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. و كما نعلم من المبرهنة(١،٦) فإن عدد تباديل $r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ شيئا مأخوذا من n نوعا من الأشياء بشرط أن عدد الأشياء المأخوذة من النوع i يساوي α_i هو $\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$. إذا معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. و بالتالي فإن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r).

مثال(٣،١٩)

كم عدد طرق ترتيب 7 حروف مأخوذة من المجموعة $\{A,B,C\}$ إذا كان عدد مرات ظهور A هو 2 أو 3 أو 6 و عدد مرات ظهور B هو 1 أو 5 و عدد مرات ظهور C هو 0 أو 3 أو 7.

الحل: من المبرهنة(٣،٧)، العدد المطلوب يساوي !7 مضروبا في معامل x^7 في مفكوك الدالة

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}\right)$$

معامل x^7 في $g(x)$ يساوي $\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!1!3!}+\frac{1}{6!1!}$؛ و منه فالعدد يساوي

$$\frac{7!}{2!5!}+\frac{7!}{3!1!3!}+\frac{7!}{6!1!}=168$$

مثال(٣،٢٠)

أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

الحل: عدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n يساوي $(n)_r$ و منه فإن الدالة المولدة الأسية المطلوبة هي

$$g(x) = \frac{(n)_0}{0!} + \frac{(n)_1}{1!}x + \frac{(n)_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(n)_n}{n!}x^n$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

يتضح من المثالين(٣،٥) و (٣،٢٠) أن $(1+x)^n$ هي الدالة المولدة العادية لعدد التوافيق من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n و أنها نفسها هي الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

إن استخراج a_r من الدالة المولدة الأسية يتطلب أحيانا إيجاد مفكوك عبارات تحتوي على دوال أسية. و نقدم في المبرهنة التالية بعض العلاقات المفيدة في هذا المجال.

مبرهنة(٣،٨)

(أ) $$(e^x)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!} = e^{nx}$$

(ب) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(ج) $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

البرهان: يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. و فيما يلي نقدم برهانا جبريا و آخر تركيبيا للفقرة (أ).

(١) البرهان الجبري:

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^n=(e^x)^n=e^{nx}=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{n^kx^k}{k!}+\cdots$$

(٢) البرهان التركيبي: ليكن a_k هو عدد المتتاليات من الطول k المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n، و لتكن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_k). نجد $g(x)$ بطريقتين مختلفتين. ينتج من المبرهنة(٣،٧) أن

$$g(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^n$$

و من ناحية أخرى، نعلم من البند(٣،١) أن $a_k=n^k$. إذا

$$g(x)=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{n^kx^k}{k!}+\cdots$$

و بالتالي فإن

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^n=1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\cdots$$

مثال(٣،٢١)

كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول r والتي تحوي عددا فرديا من الأصفار؟

الحل: الدالة المولدة الأسية لعدد المتتاليات المطلوب هي

$$g(x)=(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]e^x=\frac{e^{2x}-1}{2}=\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}$$

و منه معامل x^r في $g(x)$ يساوي $\frac{2^{r-1}}{r!}$. و من المبرهنة(٣،٧)، العدد المطلوب يساوي 2^{r-1}.

مثال(٣،٢٢)

كم عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4\}$ و التي يظهر فيها كل من 1,2,4 مرة واحدة على الأقل؟

الحل: الدالة المولدة الأسية للعدد المطلوب هي

$$g(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^3=e^x(e^x-1)^3$$
$$=e^x\left[e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1\right]=e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

و عليه فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي $\frac{4^r}{r!}-3\frac{3^r}{r!}+3\frac{2^r}{r!}-\frac{1}{r!}$. و من المبرهنة(٣،٧)، العدد المطلوب يساوي $4^r-3^{r+1}+3.2^r-1$.

و في ختام هذا الفصل نشير إلى أن الدوال المولدة تؤدي دورا مهما في معالجة موضوع العلاقات الإرتدادية و سنرى ذلك بشيء من التفصيل في فصل قادم.

تمارين(٢،٣)

١-كم عدد طرق ترتيب 4 من حزوف كلمة ENGINE؟

٢-أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول r والمأخوذة حروفها من الأبجدية $\{a,b,c,d\}$.

٣-أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(r!)$.

٤-أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(1/r)$.

٥-أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد طرق توزيع r شخصا على n غرفة مختلفة بحيث لا يقل عدد الأشخاص في الغرفة الواحدة عن أثنين و لا يزيد عن خمسة.

٦- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول $r \geq 0$ والمأخوذة حروفها من الكلمات التالية:

(أ) MISSISSIPPI

(ب) HAWAII

(ج) ISOMORPHISM

٧- أوجد حـل الفقرة (أ) من التمرين ٦ عندما تظهر I في الكلمة مرتين على الأقل.

٨- إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (b_n) فأثبت أن $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (c_n) حيث $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. تسمى c_n التفاف ذات الحدين (binomial convolution) للمتتاليتين (a_n) و (b_n).

الفصل الرابع

العلاقات الارتدادية

RECURRENCE RELATIONS

في كثير من مسائل العدّ، تؤدي دراسة المسألة و تحليلها إلى كتابة الحل على شكل متتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$. أحياناً، نكتفي بوصف حدود المتتالية لتعذر إيجاد أي علاقات بين تلك الحدود. فمثلاً، متتالية الأعداد الأولية 2,3,5,7,11,... لا يعرف لحدها العام أي صيغة جبرية صريحة كما لا تعرف أي علاقة بين حدود المتتالية.
و أحياناً أخرى، يمكن التعبير بسهولة عن الحدّ العام بصيغة جبرية صريحة كما في حالة المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية. و في بعض المسائل، يمكن حساب الحدّ العام a_n ارتدادياً؛ أي، يمكن كتابة معادلة تعطينا a_n بدلالة بعض الحدود a_r حيث $r < n$. تسمى المعادلة علاقة ارتدادية، و إذا أمكن التعبير عن a_n بصيغة جبرية صريحة فإنه يقال إن العلاقة الارتدادية قد حُلّت. و لبعض الأغراض تكون الصيغة الجبرية الصريحة للحدّ العام a_n مفيدة، ولكن العلاقة الارتدادية تكون أكثر فائدة لأغراض أخرى مثل حساب a_n لقيمة معطاة لِ n.

في هذا الفصل، نقدم أصنافاً من العلاقات الارتدادية التي توجد طرائق لحلّها، كما نعالج بعض المسائل التي يمكن بناء علاقات ارتدادية لها. وسيلاحظ

القارئ أن المقاربة المتبعة في دراسة العلاقات الارتدادية تُذكِّر بطريقة معالجة المعادلات التفاضلية العاديّة.

(٤،١) مقدمة

لتكن $a_0, a_1, a_2, \ldots$ متتالية. كل صيغة تُعبِّر عن الحدّ العام a_n بدلالة واحد أو أكثر من الحدود السابقة له $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ، لكل $n \geq k$ حيث k عدد صحيح موجب و ثابت ، تسمى **علاقة ارتدادية** للمتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ؛ كل حد من الحدود $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ لا يحقق العلاقة الارتدادية تسمى قيم هذه الحدود **بالشروط الابتدائية للمتتالية**. تسمى متتالية ما حلاً لعلاقة ارتدادية معطاة إذا كانت حدود المتتالية تحقق العلاقة الارتدادية.

يقال عن علاقة ارتدادية إنها **خطية من الرتبة** k إذا كان يمكن كتابتها على الصورة $u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$ حيث $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ دوال معّرفة لكل n و f_k ليست دالة صفرية. إذا كانت g دالة صفرية فإن العلاقة تسمى **متجانسة**، ويقال إن العلاقة **غير متجانسة** عندما تكون g ليست دالة صفرية. كما يقال إن العلاقة **ذات معاملات ثابتة** عندما تكون $f_1, f_2, \ldots, f_k$ دوال ثابتة.

تبيّن المبرهنة التالية أن حل العلاقة الارتدادية الخطية يكون وحيداً عندما تعطى الشروط الابتدائية.

مبرهنة(١،٤)

يوجد حل وحيد للعلاقة الارتدادية الخطية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$$

بحيث $u_0 = a_0, u_1 = a_1, \ldots, u_{k-1} = a_{k-1}$ حيث $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ثوابت معطاة.

البرهان: نستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن u_n معّين بشكل وحيد لكل عدد صحيح $n \geq 0$. ينتج من الشروط الابتدائية أن كلاً من $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ معّين بشكل وحيد. نفرض أن $n \geq k-1$ و أن $u_0, u_1, \ldots, u_n$ معّينة بشكل وحيد. بما أن $n+1 \geq k$ ، فإن العلاقة الارتدادية تعطي

$$u_{n+1} = -f_1(n+1)u_n - f_2(n+1)u_{n-1} - \ldots - f_k(n+1)u_{n+1-k} + g(n+1)$$

و بالتالي ينتج من فرضية الاستقراء أن u_{n+1} معّين بشكل وحيد ■

يساعد المبدأ التالي على إيجاد حلول للعلاقات الارتدادية الخطية.

مبرهنة(٢،٤) (مبدأ التراكب) (Superpostion principle)

إذا كان $u_n^{(1)}$ حلاً للعلاقة الخطية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_1(n)$$

و كان $u_n^{(2)}$ حلاً للعلاقة الخطية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_2(n)$$

فإن $c_1 u_n^{(1)} + c_2 u_n^{(2)}$ يكون حلاً للعلاقة الخطية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان.

البرهان:

$$[c_1u_n^{(1)} + c_2u_n^{(2)}] + f_1(n)[c_1u_{n-1}^{(1)} + c_2u_{n-1}^{(2)}] + f_2(n)[c_1u_{n-2}^{(1)} + c_2u_{n-2}^{(2)}] + \cdots +$$
$$f_k(n)[c_1u_{n-k}^{(1)} + c_2u_{n-k}^{(2)}] = c_1[u_n^{(1)} + f_1(n)u_{n-1}^{(1)} + f_2(n)u_{n-2}^{(1)} + \cdots + f_k(n)u_{n-k}^{(1)}] +$$
$$c_2[u_n^{(2)} + f_1(n)u_{n-1}^{(2)} + f_2(n)u_{n-2}^{(2)} + \cdots + f_k(n)u_{n-k}^{(2)}] = c_1g_1(n) + c_2g_2(n)$$

(٢،٤) العلاقات الارتدادية الخطية المتجانسة

في هذا البند نركز اهتمامنا على البحث عن حلول العلاقة الارتدادية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة. لتكن $u_n + d_1u_{n-1} + d_2u_{n-2} + \ldots + d_ku_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية بحيث $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ثوابت. و اضح أن $u_n = 0$ حل لهذه العلاقة، و يسمى الحل التافه أو الحل الصفري. إذا كان $u_n = \alpha^n$ حلاً غير تافه للعلاقة فإن $\alpha \neq 0$ تحقق $\alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + d_2\alpha^{n-2} + \ldots + d_k\alpha^{n-k} = 0$، وبالتالي فإن α تحقق $\alpha^k + d_1\alpha^{k-1} + d_2\alpha^{k-2} + \ldots + d_k = 0$. و يقودنا هذا التحليل إلى التعريف التالي.

لتكن $u_n + d_1u_{n-1} + d_2u_{n-2} + \ldots + d_ku_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة. تسمى $P(x) = x^k + d_1x^{k-1} + \ldots + d_k$ **كثيرة الحدود المميزة** و تسمى $P(x) = 0$ **المعادلة المميزة أو المعادلة المساعدة** للعلاقة الارتدادية، و تسمى جذورها **الجذور المميزة** للعلاقة الارتدادية.

و في الحالة التي تكون فيها الجذور المميزة مختلفة، فإنه يمكن كتابة حلول العلاقة الارتدادية بصورة بسيطة نسبياً، أما في الحالة الأخرى فإنه يمكن الوصول إلى الحلول و لكن الأمر ليس بالبساطة نفسها.

مبرهنة(٣،٤)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة، و جذورها المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ مختلفة. عندئذ ، لكل مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ يكون

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \ldots + c_k \alpha_k^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. و لكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). تسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان: بما أن كلاً من $u_n^{(1)} = \alpha_1^n, \ldots, u_n^{(k)} = \alpha_k^n$ حل للعلاقة الارتدادية، فإنه ينتج من مبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية. الآن نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية، و نبحث عن ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يكون $u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \ldots + c_k \alpha_k^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_k = b_0$$

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_k c_k = b_1$$

$$\alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 + \ldots + \alpha_k^2 c_k = b_2$$

....

$$\alpha_1^{k-1} c_1 + \alpha_2^{k-1} c_2 + \ldots + \alpha_k^{k-1} c_k = b_{k-1}$$

و إذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن محدد A يكون

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

لأنه على شكل محدد فاندرموند . و بما أن $\alpha_i \neq \alpha_j$ لكل $i \neq j$ ، فإن $\det(A) \neq 0$. إذاً، يوجد لنظام المعادلات الخطية حل وحيد. و بالتالي، فإنه يوجد للعلاقة الارتدادية حلّ على الشكل (*) بحيث $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. و لكن هذا الحل وحيد حسب المبرهنة(١، ٤)؛ إذاً يكون هذا الحل هو $u_n = b_n$.

مثال(١، ٤)

أوجد صيغة جبرية صريحة للحد العام لمتتالية فيبوناتشي التي تحقق $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ لكل $n \geq 2$ ، $a_0 = a_1 = 1$.

الحل: المعادلة المميزة $x^2-x-1=0$ لها الجذران $\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

إذا، الحل العام هو $a_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. و ينتج من $a_0=a_1=1$ أن

$$c_1+c_2=1$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2=1$$

و بحل نظام المعادلات نجد أن $c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ و $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ و بالتالي ، نجد أن $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$. و تجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام العلاقة الارتدادية لحساب a_n أبسط من استخدام الصيغة الصريحة للغرض نفسه.

مثال(٢،٤)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0, n\ge 2$ حيث $a_0=2, a_1=5$.

الحل:

المعادلة المميزة $x^2-5x+6=0$ لها الجذران المختلفان $\alpha_2=3$ و $\alpha_1=2$. إذا، يمكن كتابة الحل العام على الشكل $a_n=c_1 2^n+c_2 3^n$. و ينتج من $a_0=2, a_1=5$ أن

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$2c_1 + 3c_2 = 5$$

و بحل نظام المعادلات نجد أن $c_1 = c_2 = 1$. إذا، $a_n = 2^n + 3^n$.

الآن، نبدأ العمل على الحالة التي لا تكون فيها الجذور مختلفة.

مبرهنة(٤،٤)

لتكن $u_n + c_1 u_{n-1} + \ldots + c_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة و من الرتبة k. إذا كان α جذرا مميزا تكراره $\mu(\alpha) = r$ ، فإن $u_n = n^m \alpha^n$ يكون حلا للعلاقة الارتدادية لكل عدد صحيح $0 \le m < r$.

البرهان:

نضع $c_0 = 1$ في الطرف الأيسر للعلاقة الارتدادية، فنجد أن:

$$c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} =$$

$$c_0 n^m \alpha^n + c_1 (n-1)^m \alpha^{n-1} + \ldots + c_k (n-k)^m \alpha^{n-k} =$$

$$\alpha^{n-k} \sum_{j=0}^{k} c_j (n-j)^m \alpha^{k-j} =$$

$$\alpha^{n-k} \sum_{j=0}^{k} c_j [(n-k) + (k-j)]^m \alpha^{k-j} =$$

$$\alpha^{n-k} \sum_{j=0}^{k} c_j \alpha^{k-j} \left[\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (n-k)^{m-i} (k-j)^i \right] =$$

$$\alpha^{n-k}(n-k)^m \sum_{j=0}^{k} c_j \alpha^{k-j} \left[\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (n-k)^{-i} (k-j)^i \right] =$$

$$\alpha^{n-k}(n-k)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (n-k)^{-i} \left[\sum_{j=0}^{k} c_j (k-j)^i \alpha^{k-j} \right] =$$

$$\alpha^{n-k}(n-k)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (n-k)^{-i} P_i(\alpha)$$

حيث $P_i(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j (k-j)^i x^{k-j}$ لكل $0 \le i \le m$. نلاحظ أن $P_o(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^{k-j}$ هي كثيرة الحدود المميزة للعلاقة الارتدادية. و لكي يتم البرهان، يكفي إثبات أن $P_i(\alpha) = 0$ لكل $0 \le i \le m$. لهذا الغرض يمكن التحقق بسهولة أن

$$P_{i+1}(x) = x \frac{d}{dx} [P_i(x)], \quad 0 \le i \le m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

و بما أن α جذر مميز تكراره r، فإنه توجد كثيرة حدود $T_0(x)$ بحيث $P_0(x) = (x-\alpha)^r T_0(x)$ و $T_0(\alpha) \ne 0$. باستخدام (*) نجد أنه يوجد $T_1(x)$ بحيث $P_1(x) = (x-\alpha)^{r-1} T_1(x)$ و $T_1(\alpha) \ne 0$.

و هكذا، بالاستخدام المتكرر للعلاقة (*) نجد أنه لكل $0 \le i \le m$ توجد كثيرة حدود $T_i(x)$ بحيث $P_i(x) = (x-\alpha)^{r-i} T_i(x)$ و $T_i(\alpha) \ne 0$. و بالتالي فإن $P_i(\alpha) = 0$ لكل $0 \le i \le m$ ■

لقد وصلنا الآن إلى وضع مناسب لتقديم المبرهنة التي تعطينا الحل العام للعلاقة الارتدادية عندما تكون الجذور المميزة في الحالة العامة.

مبرهنة(٤،٥)

لتكن $u_n + c_1 u_{n-1} + \ldots + c_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة و من الرتبة k ، وجذورها المميزة المختلفة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ لها التكرارات $\mu(\alpha_i) = r_i$ لكل $0 \le i \le s$. عندئذٍ، لكل مجموعة من الثوابت

$c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,r_1}, \ldots, c_{s,1}, c_{s,2}, \ldots, c_{s,r_s}$ يكون

$$u_n = \sum_{i=1}^{s} \left(c_{i,1} + c_{i,2} n + c_{i,3} n^2 + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}\right) \alpha_i^n \; \ldots\ldots\ldots (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. ولكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,r_1}, \ldots, c_{s,1}, c_{s,2}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). و تسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان:

ينتج من المبرهنة(٤،٤) و مبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية.

الآن، نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية و نبحث عن ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,r_1}, \ldots, c_{s,1}, c_{s,2}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $u_n = \sum_{i=1}^{s} \left(c_{i,1} + c_{i,2} n + c_{i,3} n^2 + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}\right) \alpha_i^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$\sum_{i=1}^{s} c_{i,1} = b_0$$

$$\sum_{i=1}^{s}(c_{i,1}+c_{i,2}+\cdots+c_{i,r_i})\alpha_i=b_1$$

$$\sum_{i=1}^{s}(c_{i,1}+c_{i,2}2+\cdots+c_{i,r_i}2^{r_i-1})\alpha_i^{\,2}=b_2$$

....

$$\sum_{i=1}^{s}[c_{i,1}+c_{i,2}(k-1)+\cdots+c_{i,r_i}(k-1)^{r_i-1}]\alpha_i^{\,k-1}=b_{k-1}$$

و إذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_1^{\,2} & 2\alpha_1^{\,2} & \cdots & 2^{r_1-1}\alpha_1^{\,2} & \alpha_2^{\,2} & \cdots & 2^{r_s-1}\alpha_s^{\,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{\,k-1} & (k-1)\alpha_1^{\,k-1} & \cdots & (k-1)^{r_1-1}\alpha_1^{\,k-1} & \alpha_2^{\,k-1} & \cdots & (k-1)^{r_s-1}\alpha_s^{\,k-1} \end{bmatrix}$$

و كما في إثبات المبرهنة(٣،٤) يكفي إثبات أن $\det(A)\neq 0$. و هذا يكافئ إثبات أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مستقلة خطياً. و بهدف الحصول على تناقض، نفرض أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مرتبطة خطياً. لكل $0\le i\le k-1$ ضع

$$V_i=(\alpha_1^i,i\alpha_1^i,\ldots,i^{r_1-1}\alpha_1^i,\cdots,\alpha_s^i,i\alpha_s^i,\ldots,i^{r_s-1}\alpha_s^i)$$

و بما أن $\{V_0,V_1,\ldots,V_{k-1}\}$ مجموعة متجهات مرتبطة خطياً، فإنه توجد ثوابت $d_0,d_1,\ldots,d_{k-1}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث $d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}=0$.

وللاختصار ضع $V=d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}$. ليكن $Q(x)=\sum_{i=0}^{k-1}d_ix_i$،

و ليكن D مؤثراً بحيث $D^if(x)=D[D^{i-1}f(x)],\ i\ge 2$ ؛ $Df(x)=x\dfrac{d}{dx}[f(x)]$

نلاحظ أن

$$V=\sum_{i=0}^{k-1} d_i V_i$$

$$V=\sum_{i=0}^{k-1} d_i(\alpha_1^i, i\alpha_1^i, \ldots, i^{r_1-1}\alpha_1^i, \cdots, \alpha_s^i, i\alpha_s^i, \ldots, i^{r_s-1}\alpha_s^i)$$

$$=(\sum_{i=0}^{k-1} d_i\alpha_1^i, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i\alpha_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i^{r_1-1}\alpha_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i^{r_s-1}\alpha_s^i)$$

$$=(Q(\alpha_1), DQ(\alpha_1), \ldots, D^{r_1-1}Q(\alpha_1), \ldots, D^{r_s-1}Q(\alpha_s))$$

ومن $V=\underline{0}$ ينتج أن

$$Q(\alpha_1)=DQ(\alpha_1)=\cdots=D^{r_1-1}Q(\alpha_1)=\cdots=D^{r_s-1}Q(\alpha_s)=0$$

إذاً لكل $1\le i\le s$ فإن α_i جذر لكثيرة الحدود $Q(x)$ تكراره r_i على الأقل.

و بالتالي، درجة $Q(x)$ أكبر من أو تساوي $r_1+r_2+\cdots+r_s=k$. و هذا يناقض أن درجة $Q(x)$ أصغر من أو تساوي $k-1$.

مثال(٣،٤)

أوجد حل المسألة التالية:

$$u_n-7u_{n-1}+16u_{n-2}-12u_{n-3}=0$$

$$u_0=1,\ u_1=2,\ u_2=0$$

الحل:

المعادلة المميزة هي $x^3-7x^2+16x-12=0$ وبالتحليل نجد أن $(x-2)^2(x-3)=0$. إذاً، 2 جذر مميز تكراره 2 و 3 جذر مميز بسيط (تكراره 1).

وبالتالي فإن الحل العام هو $u_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n$. باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$c_1 + c_3 = 1$$

$$2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 2$$

$$4c_1 + 8c_2 + 9c_3 = 0$$

و بحل نظام المعادلات نجد أن $c_3 = -4$, $c_2 = 2$, $c_1 = 5$. إذاً، $u_n = 5(2^n) + n2^{n+1} - 4(3^n)$ هو الحل المطلوب.

(٤،٣) العلاقات الارتدادية غير المتجانسة

يتضح من المبرهنة التالية أن حل العلاقات الارتدادية غير المتجانسة و ثيق الصلة بحل المعادلات الارتدادية المتجانسة.

مبرهنة(٤،٦)

لتكن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = f(n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة و من الرتبة k. ليكن

$u_n^{(h)} = \sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}) \alpha_i^n$ هو الحل العام للجزء المتجانس من (*) ، أي

الحل العام لـ $u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0$. عندئذ، إذا كان $u_n = u_n^{(p)}$ أي حل خاص لـ (*) ، فإن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل لـ (*) . و إذا كان $u_n = a_n$ أي حل لـ (*) ، فإنه يوجد ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة a_n على الشكل $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. و يسمى $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ **حلاً عاماً** لِ (*) .

البرهان:

ينتج من مبدأ التراكب أن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية (*) .

الآن، نفرض أن $u_n = a_n$ حل لِ (*) و نبحث عن ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. سنثبت أولاً أن $u_n = a_n - u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

بالتعويض في الطرف الأيسر لـ (**) نجد أن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} =$$

$$a_n - u_n^{(p)} + c_1(a_{n-1} - u_{n-1}^{(p)}) + \cdots + c_k(a_{n-k} - u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} - (u_n^{(p)} + u_{n-1}^{(p)} + \cdots + u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$f(n) - f(n) = 0$$

إذاً، $u_n = a_n - u_n^{(p)}$ حل لـ (**) . و بالتالي، توجد ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون

$$u_n = a_n - u_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}) \alpha_i^n$$

إذاً، $a_n = \sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}) \alpha_i^n$ كما هو مطلوب.

يعتمد إيجاد حل خاص للعلاقة الارتدادية

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = f(n) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

على $f(n)$ ؛ و لذلك لا توجد طريقة عامة تعطينا حلولاً خاصة في جميع الأحوال. سنكتفي بإعطاء إرشادات للبحث عن حلول خاصة لـ (1) عندما تكون $f(n)$ في شكل معين، و سنتبع ذلك ببعض الأمثلة التي توضح تلك الإرشادات.

(أ) إذا كانت $f(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_t n^t$ حيث $b_0, b_1, \ldots, b_t$ ثوابت و كان العدد 1 ليس جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = e_0 + e_1 n + \cdots + e_t n^t$ حيث $e_0, e_1, \ldots, e_t$ ثوابت.

(ب) إذا كانت $f(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_t n^t$ حيث $b_0, b_1, \ldots, b_t$ ثوابت و كان العدد 1 جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = n^r (e_0 + e_1 n + \cdots + e_t n^t)$ حيث $e_0, e_1, \ldots, e_t$ ثوابت.

(ج) إذا كانت $f(n) = \beta^n$ حيث $\beta \neq 1$ و كان العدد β ليس جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = e_0 \beta^n$ حيث e_0 ثابت.

(د) إذا كانت $f(n) = \beta^n$ حيث $\beta \neq 1$ و كان العدد β جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = e_0 n^r \beta^n$ حيث e_0 ثابت.

يمكن استخدام مبدأ التراكب للبحث عن حل خاص لـ (1) عندما تكون $f(n)$ على الشكل $f(n) = d_1 f_1(n) + \cdots + d_i f_i(n)$ حيث $d_1, d_2, \ldots, d_i$ ثوابت

وكل $f_1(n), f_2(n), \dots, f_i(n)$ من على شكل $f(n)$ في الفقرة (أ) أو (ب) أو (ج) أو (د) أعلاه. الأمثلة التالية توضح تلك الحالات المختلفة.

مثال(٤،٤)

أوجد حل المسألة التالية:

$$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$$

$$a_0 = -4$$

الحل

نجد بسهولة أن $a_n^{(h)} = c(-3)^n$ حيث c ثابت اختياري. و بما أن 1 ليس جذراً مميزاً، فإنه يمكن الفرض أن $a_n^{(p)} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ حل خاص. و بالتعويض نحصل على

$$(c_0 + c_1 n + c_2 n^2) + 3[c_0 + c_1(n-1) + c_2(n-1)^2 = 4n^2 - 2n$$

و مقارنة المعاملات في الطرفين تعطينا نظام المعادلات الخطية التالي:

$$4c_0 - 3c_1 + 3c_2 = 0$$

$$4c_1 - 6c_2 = -2$$

$$4c_2 = 4$$

و بحل هذا النظام نجد أن $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 1$.

إذاً، $a_n^{(p)} = n + n^2$. و بالتالي فإن $a_n = c(-3)^n + n + n^2$.

الآن، نستخدم الشرط الابتدائي $a_0 = -4$ فنجد أن $c = -4$. إذاً،
$a_n = -4(-3)^n + n + n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٥،٤)

أوجد حل المسألة التالية:

$$a_n - a_{n-1} = n$$
$$a_0 = 1$$

الحل

واضح أن $a_n^{(h)} = c$ حيث c ثابت اختياري. وبما أن 1 جذر مميز تكراره 1، فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = n(c_0 + c_1 n^2) = c_0 n + c_1 n^2$ حل خاص. و بالتعويض نجد أن

$$(c_0 n + c_1 n^2) - [c_0(n-1) + c_1(n-1)^2] = n$$

و بمقارنة المعاملات نحصل على

$$c_0 - c_1 = 0$$
$$2c_1 = 1$$

إذاً، $c_0 = \frac{1}{2},\ c_1 = \frac{1}{2}$. و بالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$

إذاً، $a_n = c + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$. و باستخدام الشرط $a_0 = 1$ نجد أن $c = 1$. إذاً $a_n = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٤،٦)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية:

$$u_n - 7u_{n-1} + 10u_{n-2} = 3^n$$

الحل

يوجد للمعادلة المميزة $x^2 - 7x + 10 = 0$ جذران: 2 تكراره 1 و 5 تكراره 1. إذاً، 3 ليس جذراً مميزاً. وبالتالي نفرض أن $u_n^{(p)} = c3^n$ حيث c ثابت. التعويض يعطينا

$$c3^n - 7c3^{n-1} + 10(c3^{n-2}) = 3^n$$

إذاً $9c - 21c + 10c = 9$ و نجد أن $c = -\frac{9}{2}$ وبالتالي فإن $u_n^{(p)} = -\frac{9}{2}3^n$ حل خاص.

مثال(٤،٧)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$$

الحل

بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = cn^2 2^n$ حل خاص.

و بالتعويض نجد أن

$$cn^2 2^n - 4c(n-1)^2 2^{n-1} + 4c(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

إذا $cn^2 - 2c(n-1)^2 + c(n-2)^2 = 1$ و تعطينا مقارنة المعاملات المعادلة $-2c + 4c = 1$. إذا $c = \frac{1}{2}$ و بالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 2^n = n^2 2^{n-1}$ حل خاص.

مثال(٨،٤)

أكتب صيغة حل خاص لكل من العلاقات الارتدادية التالية:

(أ) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$

(ب) $u_n + u_{n-1} = 3n2^n$

(ج) $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = (n+1)2^n$

الحل

(أ) نجد حلا خاصا لـ $a_n + 2a_{n-1} = 2^n$ على الشكل $a_n^{(p)} = c2^n$ لأن 2 ليس جذرا مميزا، و نجد حلا خاصا لـ $a_n + 2a_{n-1} = -n^2$ عل الشكل $a_n^{(p)} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ لأن 1 ليس جذرا مميزا؛ ثم نستخدم مبدأ التراكب فنجد أن $a_n^{(p)} = c2^n + c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ هو الحل الخاص المطلوب.

(ب) بما أن 2 ليس جذرا مميزا فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو

$$u_n^{(p)} = (c_0 + c_1 n)2^n$$

(ج) بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو

$$u_n^{(p)} = n^2(c_0 + c_1 n)2^n$$

سنقدم في المثال التالي طريقة يمكن اتباعها لحل العلاقات الارتدادية التي يمكن كتابتها على الشكل $a_n + f(n)a_{n-1} = g(n)$ حيث $f(n) \neq 0$ لكل $n \geq 1$.

مثال(٩،٤)

أوجد حل المسألة التالية:

$$a_n - 2na_{n-1} = n, \ n \geq 1$$
$$a_0 = 2$$

الحل

نبدأ بإيجاد حل للجزء المتجانس $a_n - 2na_{n-1} = 0$ باستخدام التعويض الأمامي أو التعويض الخلفي. نفرض أن $a_n^{(h)} = u_n$ حل للجزء المتجانس بحيث $u_0 = 1$. إذا، $u_n - 2nu_{n-1} = 0$ ؛ أي، $u_n = 2nu_{n-1}$ و $u_0 = 1$. و بالتالي فإن

$$u_n = 2nu_{n-1} = 2n[2(n-1)u_{n-2}]$$
$$= 2^2 n(n-1)u_{n-2} = 2^3 n(n-1)(n-2)u_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$2^n n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)1u_0 = n!2^n$$

والآن نفرض أن الحل المطلوب على الشكل $a_n = u_n v_n$ ، فيكون $a_0 = u_0 v_0$ ؛ إذا $v_0 = 2$. كما يكون

$$a_n - 2na_{n-1} = n, \ n \geq 1$$
$$u_n v_n - 2nu_{n-1} v_{n-1} = n$$
$$u_n v_n - u_n v_{n-1} = n$$
$$v_n - v_{n-1} = \frac{n}{u_n}$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{n}{n!2^n}$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{n!2^n}$$

وبالتالي فإن

$$v_n = v_{n-2} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n}$$

$$= v_{n-3} + \frac{n-2}{(n-2)!2^{n-2}} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n}$$

$$\vdots$$

$$= v_0 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}$$

إذا

$$v_n = 2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$a_n = u_n v_n = n!2^n[2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}]$$

و كما هو معلوم، فإنه يمكن استخدام الدوال المولدة العادية و الدوال المولدة الأسية في حل العلاقات الارتدادية. و نقدم الآن بعض الأمثلة على ذلك.

مثال(٤،١٠)

أوجد حل المسألة التالية مستخدما الدوال المولدة.

$$a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1$$
$$a_0 = 1$$

الحل

نفرض أن الدالة المولدة للمتتالية (a_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذا

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$
$$= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$
$$= 1 + x f(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

ومن معامل x^n نجد أن

$$a_n = 1 + \frac{(n+1)n}{2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

مثال(١١،٤)

استخدم الدوال المولّدة لحل المسألة التالية:

$$a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, \ n \geq 1$$
$$a_0 = 1$$

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة للمتتالية (a_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذاً

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 4^{n-1}) x^n$$
$$= 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (4x)^n$$
$$= 1 + 2x f(x) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-4x} - 1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1-3x}{(1-2x)(1-4x)}$$

و باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{(1-2x)}+\frac{\frac{1}{2}}{1-4x}$$

إذا

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}4^n x^n$$

وبحساب معامل x^n نجد أن

$$a_n=\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n$$

مثال(١٢،٤)

استخدم الدوال المولدة الأسية لحل المسألة التالية:

$$d_n=nd_{n-1}+(-1)^n,\ n\geq 1$$

$$d_0=1$$

الحل

نفرض أن الدالة المولدة الأسية للمتتالية (d_n) هي $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$. إذا

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{d_0}{0!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[nd_{n-1}+(-1)^n]x^n\\&=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\end{aligned}$$

$$= 1 + xf(x) + \left[e^{-x} - 1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$= (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}) x^n$$

ومن معامل x^n نجد أن

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

إذا

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

(٤،٣) بناء العلاقات الارتدادية

ونختم موضوع العلاقات الارتدادية بإعطاء بعض الأمثلة التي توضح كيفية بنائها.

مثال(٤،١٣)

لتكن $\sum = \{0,1\}$ أبجدية و لترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n و التي لا تحتوي على ثلاثة أصفار متعاقبة، أي لا تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) و عين الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n و لا تحتوي على النسق 000. إذا كان $x_1 = 1$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ و لا تحتوي على النسق 000. أما إذا كان $x_1 = 0$ فإنه إما أن يكون $x_1x_2 = 01$ أو أن يكون $x_1x_2 = 00$. عندما يكون $x_1x_2 = 01$ فإن $x_3x_4\cdots x_n$ كلمة طولها $n-2$ و لا تحتوي على النسق 000؛ و عندما يكون $x_1x_2 = 00$ فلا بد أن يكون $x_3 = 1$ و بالتالي فإن $x_4x_5\cdots x_n$ تكون كلمة طولها $n-3$ و لا تحتوي على النسق 000. ينتج من النقاش السابق أن $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ لكل $n \geq 3$. و من جهة ثانية فإن $a_0 = 1$ لان الكلمة التي طولها صفر، أي الكلمة الخالية، لا تحتوي على النسق 000. و بالمثل فإن $a_1 = 2$ و $a_2 = 4$ لأن جميع الكلمات التي طول كل منها 1 أو 2 لا تحتوي على النسق 000.

مثال(٤،١٤)

لتكن $\sum = \{0,1,2,\ldots,9\}$ أبجدية و لترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n و التي تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) و عين الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n و تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. إذا كان $x_1 \neq 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ و تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أما إذا كان $x_1 = 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ و تحتوي على عدد فردي من الأصفار. بما أن عدد الكلمات التي طول كل منها $n-1$ يساوي 10^{n-1}، فنجد أن $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$. أي، $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ لكل $n \geq 1$. كذلك، $a_0 = 1$ لان الكلمة الخالية، لا تحتوي على أصفار.

مثال(٤،١٥)

نقول عن مستقيمات في المستوى إنها في وضع عام عندما تتقاطع زوجا زوجا وأي ثلاثة منها لا تلتقي في نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناتجة عن n من المستقيمات التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) و عين الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $L_1, L_2, \cdots, L_n$ مستقيمات في وضع عام في المستوى و لتكن $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ نقاط تقاطع L_n مع $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ على الترتيب. نلاحظ أن النقاط $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ تقسم L_n إلى n جزءا. كما نلاحظ أن $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ في وضع عام في المستوى، وكل جزء من أجزاء L_n يقسم منطقة من المناطق المعينة بالمستقيمات $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ إلى منطقتين. إذا $a_n = a_{n-1} + n$ لكل $n \geq 1$. كذلك، واضح أن $a_0 = 1$.

مثال(٤،١٦)

لترمز d_n إلى عدد التبديلات التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) و عين الشروط الابتدائية.

الحل:

سنجد ثلاث علاقات ارتدادية مختلفة للمتتالية (d_n).

(أ) واضح أن $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. لتكن $X = \{1,2,\ldots,n\}$ حيث $n \geq 3$ ، و ليكن $x_1 x_2 \cdots x_n$ تبديلا تاما للمجموعة X. إذا $x_1 \neq 1$ ، و بالتالي فإن مجموعة التبديلات التامة التي فيها $x_1 = 2$ ، و مجموعة التبديلات التامة التي فيها $x_1 = 3$ ، ...، و مجموعة التبديلات التامة التي فيها $x_1 = n$ ، تكون تجزئة لمجموعة التبديلات التامة للمجموعة X. واضح أن كلا من أجزاء هذه التجزئة يحتوي على العدد نفسه من التبديلات التامة للمجموعة X. ليكن a_n هو عدد التبديلات التامة للمجموعة X و التي فيها $x_1 = 2$. إذا $d_n = (n-1)\, a_{n-1}$. و لحساب a_n فإننا نعتبر مجموعة التبديلات التامة التي لها الشكل:

$$2x_2x_3\cdots x_n;\ x_2 \neq 2,\ x_3 \neq 3,\ldots,\ x_n \neq n$$

توجد تجزئة لهذه المجموعة إلى جزئين: الأول يتكون من التبديلات التامة التي فيها $x_2 = 1$ و الثاني الأول يتكون من التبديلات التامة التي فيها $x_2 \neq 1$. إن عدد التبديلات التامة في الجزء الأول هو d_{n-2} لأنه يساوي عدد التبديلات التامة $x_3x_4\cdots x_n$ للمجموعة $\{3,4,\ldots,n\}$ التي فيها $x_3 \neq 3,\ x_4 \neq 4,\ldots,\ x_n \neq n$. أما

عدد التبديلات التامة في الجزء الثاني فهو d_{n-1} لأنه يساوي عدد التبديلات التامة $x_2x_3\cdots x_n$ للمجموعة $\{1,3,4,\ldots,n\}$ التي فيها

$$x_2 \neq 1,\ x_3 \neq 3,\ x_4 \neq 4,\ldots,\ x_n \neq n$$

إذاً $a_n = d_{n-2} + d_{n-1}$ وبالتالي فإن $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}],\quad n \geq 3$ وإذا اصطلحنا على وضع $d_0 = 1$ فإنه يمكن كتابة العلاقة الارتدادية و الشروط الابتدائية على الشكل

$$d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}],\quad n \geq 2$$

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0$$

(ب) ضع $a_n = d_n - nd_{n-1}$ لكل $n \geq 1$. باستخدام $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}]$ نجد أن

$$a_n = d_n - nd_{n-1} = -1[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$$

إذا $a_n = -a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$ و $a_1 = -1$ ؛ و ينتج أن $a_n = (-1)^n$ لكل $n \geq 1$. إذا

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad n \geq 1$$

$$d_0 = 1$$

(ج) ليكن σ تبديلا للمجموعة $A = \{1,2,\ldots,n\}$ و لتكن $B = \{x \in A : \sigma(x) \neq x\}$. إذا σ تعطينا تبديلا تاما للمجموعة B التي هي مجموعة جزئية من A. و نصطلح على أن σ تعطينا التبديل التام الوحيد للمجوعة الخالية عندما تكون $B = \phi$.

و بالتالي يمكن تعريف تبديلات المجموعة $A=\{1,2,\ldots,n\}$ كما يلي: نختار مجموعة جزئية $B \subseteq A$ ثم نختار تبديلا تاما τ للمجموعة B ثم نعرف تبديلا σ للمجموعة A بوضع $\sigma(x)=\tau(x)$ لكل $x \in B$ و $\sigma(x)=x$ لكل $x \notin B$. و إذا كان $|B|=k$ فإن عدد طرق اختيار B يساوي $\binom{n}{k}$. إذا، بحساب عدد تبديلات A مباشرة و عن طريق التبديلات التامة للمجموعات الجزئية من A نجد أن

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_k = n!$$

و بالتالي فإن

$$d_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} d_k,\ \ n \geq 1$$

$$d_0 = 1$$

نقدم الآن المسألة المعروفة بأحجية أبراج هانوي

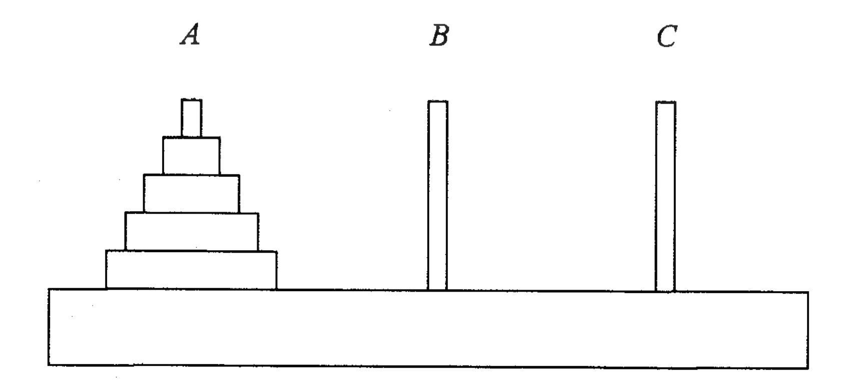
مثال(٤،١٧)

توجد ثلاثة أوتاد رأسية A,B,C على لوحة أفقية. و يوجد n من الأقراص المثقوبة حول مراكزها، و هذه الأقراص مختلفة من حيث الأقطار و مرتبة على الوتد A بحيث تتناقص أطوال أقطار الأقراص من أسفل إلى أعلى. نريد نقل الأقراص إلى الوتد C شرط أن نحمل في النقلة الواحدة قرصا و احدا و شرط أن لا نضع قرصا فوق آخر إذا كان الأول أكبر من الثاني قطرا و شرط أن نستخدم الأوتاد A,B,C فقط. المطلوب ايجاد

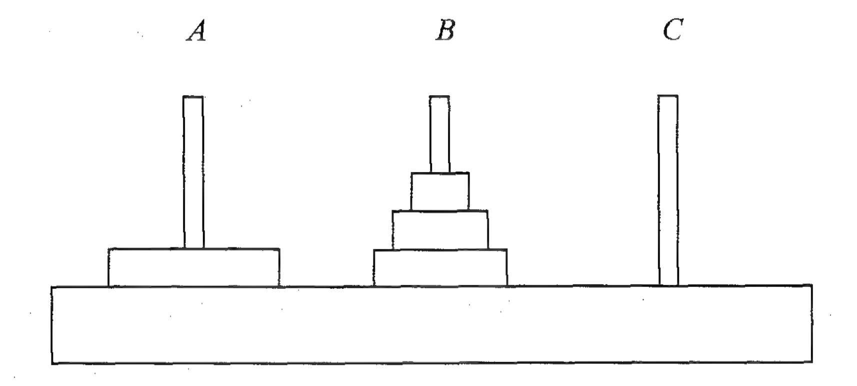
المتتالية (a_n) حيث a_n ترمز إلى أصغر عدد ممكن من النقلات التي تفي بغرضنا عندما يكون عدد الأقراص يساوي n.

الحل

يبين الشكل التالي أن n من الاقراص المختلفة مرتبة على الوتد A بينما الوتدان B و C خاليان من الأقراص.



أولاً، ننقل جميع الأقراص ما عدا القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد B. و بالطبع فإن القرص الأكبر يترك ثابتاً في مكانه أثناء اجراء عمليات النقل. إن عدد النقلات الأمثل لإنجاز المهمة السابقة يساوي a_{n-1}. و يبين الشكل التالي الأقراص في الوضع الجديد.



الآن، ننقل القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد C و ننجز هذه المهمة بنقلة واحدة. ثم ننقل الأقراص الأخرى من الوتد B إلى الوتد C، و ننجز هذه المهمة بعدد من النقلات يساوي a_{n-1}. ويرى القارئ بسهولة أن الخوارزمية السابقة هي الخوارزمية المثلى لنقل جميع الأقراص من الوتد A إلى الوتد C.

إذاً $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$، و بالتالي فإن $a_n = 2a_{n-1} + 1$ لكل $n \geq 2$. كذلك $a_1 = 1$، و إذا اصطلحنا على أن $a_0 = 0$ فيكون

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \ n \geq 1$$
$$a_0 = 0$$

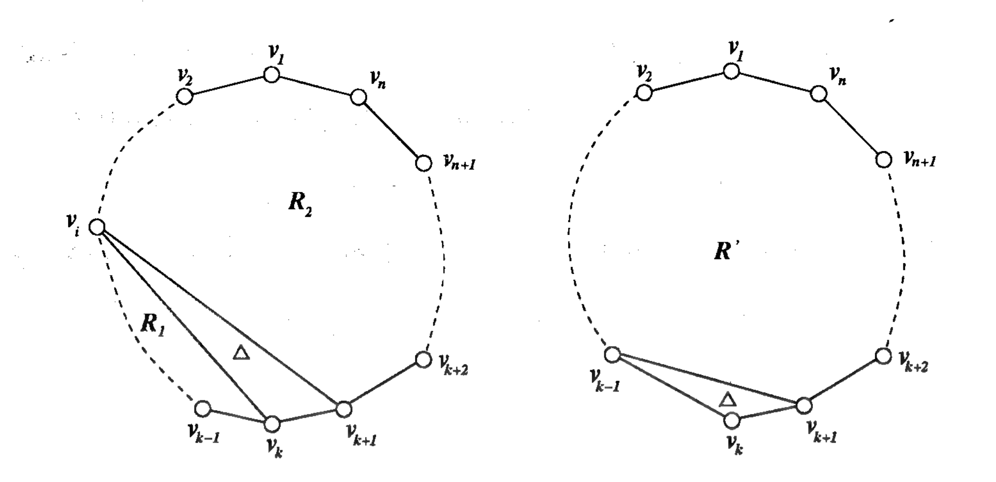
تظهر أعداد كتلان Catalan numbers في كثير من مسائل العد. و لتقديم هذه الأعداد فإننا نختار مقاربة هندسية. إذا كانت لدينا منطقة مضلعة محدبة، و قسمناها إلى مناطق مثلثة مستخدمين أقطاراً غير متقاطعة زوجاً زوجاً داخلها، فإننا نسمي مجموعة المناطق المثلثة **مثالثة** للمنطقة المضلعة.

مثال(٤،١٨)

لكل عدد صحيح $n \geq 2$ ، لترمز t_n إلى عدد مثالثات منطقة مضلعة محدبة عدد أضلاعها $n+1$. و لنعرف $t_0 = 0, t_1 = 1$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (t_n) ، ثم أوجد صيغة جبرية صريحة للحد العام t_n.

الحل

نجد بسهولة أن $t_2 = 1$. نفرض الآن أن $n \geq 3$ ، و لتكن R منطقة محدبة عدد أضلاعها $n+1$ ورؤوسها النقاط $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ كما يوضح الشكل التالي:



نختار ضلعا $[v_k v_{k+1}]$ ، مثلا، و نثبته. إذا كانت T مثالثة للمنطقة R ، فإن $[v_k v_{k+1}]$ يكون ضلعا لمنطقة مثلثة Δ من مناطق T و يكون أحد الرؤوس $v_i, i \neq k, i \neq k+1$ رأسا لـ Δ. واضح أن Δ تقسم المنطقة المتبقية من R إلى منطقتين مضلعتين محدبتين R_1 و R_2 عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$. أما إذا

كان $i=k+2$ أو $i=k-1$ فإن R تنقسم إلى ∆ و إلى منطقة مضلعة محدبة أخرى R'. و من هنا فإن عدد أضلاع R_1 يساوي $j+1$ و عدد أضلاع R_2 يساوي $n-j+1$ حيث j يساوي أحد الأعداد $2,3,\ldots,n-2$ ،و عدد أضلاع R' يساوي n. واضح أن T تعطينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، و إذا كان لدينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، فإننا نحصل على مثالثة للمنطقة R. و بما أن عدد أضلاع R' و R_2 و R_1 يساوي n و $n-j+1$ و $j+1$ على الترتيب فإن عدد مثالثات R' و R_2 و R_1 يساوي t_{n-1} و t_{n-j} و t_j على الترتيب. و بالتالي، عدد مثالثات R يساوي $t_j t_{n-j}$ عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$ ؛ كما أن عدد مثالثات R يساوي t_{n-1} عندما يكون $i=k+2$ أو $i=k-1$. إذا، t_n ، أي عدد مثالثات R ، يحقق العلاقة $t_n = t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + t_3 t_{n-3} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1}$ لكل $n \geq 3$. و بما أن $t_0 = 0,\ t_1 = 1$ فإن t_n تحقق لكل $n \geq 3$ العلاقة

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1} t_1 + t_n t_0 \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

و لما كانت $t_2 = 1$ فإن (*) تتحقق لكل $n \geq 2$. و نخلص إلى أن المتتالية (t_n) تحقق

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_n t_0,\ \ n \geq 2$$

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1$$

ولإيجاد t_n نستخدم طريقة الدوال المولدة. في الحقيقة ، لتكن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ هي الدالة المولدة للمتتالية (t_n). عندئذ،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} t_n x^n$$

$$= t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \cdots + t_n t_0) x^n$$

$$= t_0 + t_1 x + f(x) f(x) + t_0 t_0 - (t_0 t_1 + t_1 t_0) x$$

$$= x + (f(x))^2$$

إذا $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$

و منه $f(x) = \dfrac{1 \mp \sqrt{1-4x}}{2}$ و بما أن $f(0) = t_0 = 0$ ، فإن

$f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.

والآن نجد مفكوك $f(x)$ باستخدام متسلسلة ذات الحدين كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{-2n+3}{2})}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1.2.3.4\cdots(2n-3)(2n-2)}{2.4.6\cdots(2n-2)} x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, 2^{n-1}} x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

إذا $t_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ لكل $n\geq 1$. وتسمى المتتالية (c_n)، حيث

$c_n=t_{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ لكل $n\geq 0$، متتالية أعداد كتلان.

تمارين

١- تسمى الكلمات التي حروفها من الأبجدية $\sum = \{0,1\}$ كلمات ثنائية. لترمز a_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n و التي تحتوي على النسق 00. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٢- لترمز b_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n و التي تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (b_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٣- لتكن $A = \{1,2,\ldots,n\}$ عندما $n > 0$ و $A = \phi$ عندما $n = 0$. و لترمز a_n إلى عدد المجموعات الجزئية من A التي لا يحتوي كل منها على عددين صحيحين متعاقبين. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٤- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\sum = \{0,1,2,3\}$ كلمة رباعية. لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n و التي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٥- لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n و التي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0 و عدد زوجي من الحرف 3. أوجد نظاما من

العلاقات الارتدادية يربط (a_n) بامثالها من المتتاليات المعرفة بناءً عى زوجية أو فردية تكرار الحروف في كلماتها. أوجد الشروط الابتدائية.

٦- (أ) أوجد الحل للتمرين (١) عندما لا تحتوي الكلمة على النسق 00.

(ب) أوجد علاقة بين المتتالية (a_n) المعطاة في (أ) و متتالية فيبوناتشي (b_n).

(ج) استند إلى (ب) و استخدم عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n و التي تكرار الحرف 0 فيها يساوي k لإثبات أن

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k}, \quad n \geq 1$$

٧- أوجد الحل للتمرين (٢) عندما لا تحتوي الكلمة على النسق 000.

٨- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\sum = \{0,1,2\}$ كلمة ثلاثية. أوجد الحلول للتمارين (١)، (٢)، (٦أ)، (٧) عندما تكون الكلمات ثلاثية.

٩- يقال عن مجموعة الدوائر إنها في وضع عام في مستوى إذا كانت تقع في المستوى بحيث تتقاطع زوجا زوجا في نقطتين و لا تتقاطع ثلاثا ثلاثا في أية نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناشئة عن n من الدوائر التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٠- أوجد الحل لمسألة أبراج هانوي عندما يكون عدد الأوتاد أربعة.

١١- أوجد الحل للتمرين (٥) عندما تكون الكلمات ثنائية.

١٢- أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل عندما يكون

(أ) $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

(ب) $a_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)$

(ج) $a_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

١٣- تسمى دائرة على سطح كروي دائرة كبرى إذا كان مركزها هو مركز الكرة نفسه. لترمز a_n إلى عدد المناطق على السطح الكروي الناتجة عن n من الدوائر الكبرى التي لا تتقاطع ثلاثا ثلاثا في أية نقطة. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

١٤- لترمز a_n إلى عدد تبديلات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ التي يجعل كل منها كل عدد في موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يسبق مباشرة موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يلي مباشرة موضعه الطبيعي. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

١٥- يستطيع ربوت أن يتحرك إلى الأمام بخطوات كل منها متر أو متران. لترمز a_n إلى عدد الطرائق التي يقطع بها الربوت مسارا طوله n مترا. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

١٦- إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $A^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$ فأوجد علاقات ارتدادية تربط بين المتتاليات (a_n) ، (b_n) ، (c_n) ، (d_n) و استخدم تلك العلاقات لحساب A^{100} .

١٧- لتكن $B_n=\{1,2,\ldots,n\}$ ، و لتكن $a_n=|A_n|$ حيث $A_n=\{(a,b,c)\in B_n^3 : a<b<c, b-a=c-b\}$. أثبت أن $a_{2n+1}=a_{2n}+n$ و أوجد علاقة مشابهة تربط بين a_{2n} و a_{2n-1} ، ثم أثبت أن المتتالية (a_n) تحقق العلاقة $a_n=a_{n-2}+n-2$. أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

١٨- لتكن المصفوفة $A_n=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $n\times n$ بحيث كل عنصر قطري فيها يساوي 2 و كل عنصر يقع فوق أو تحت القطر مباشرة يساوي 1 بينما كل عنصر آخر يساوي صفرا. إذا كانت $d_n=\det(A_n)$ ، فأوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل.

١٩- لدينا $2n$ نقطة $P_1,P_2,\ldots,P_{2n}$ موزعة على محيط دائرة بحيث تكون رؤوس مضلع منتظم. لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{P_1,P_2,\ldots,P_{2n}\}$ إلى أزواج بحيث لا تتقاطع الأوتار المعينة بأزواج التجزئة زوجا زوجا. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية ، ثم أوجد الحل و قارنه بأعداد كتلان.

٢٠- لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بحيث تكون أجزاء التجزئة أزواجا أو مجموعات أحادية. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل مستخدما طريقة الدوال المولدة الأسية.

٢١- أوجد الحل العام لكل من العلاقات الارتدادية التالية؛ و إذا كانت الجذور المميزة أعدادا مركبة فاكتب الحل العام معتبرا الثوابت الاختيارية أعدادا مركبة.

(أ) $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

(ب) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

(ج) $a_n + 3a_{n-2} = 0$

(د) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

(هـ) $a_n + 10a_{n-1} + 32a_{n-2} + 32a_{n-3} = 0$

(و) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$

(ز) $4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$

(ح) $a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0$

٢٢- أوجد حل كل من المسائل التالية؛ و إذا كانت الجذور المميزة أعدادا مركبة فاستخدم صيغة دي موافر لكتابة الحل في شكل بسيط.

(أ) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$

$a_0 = 0,\ a_1 = 3$

(ب) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

$$a_0 = 1, a_1 = 6$$

ج) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$$a_0 = 0, a_1 = 2$$

د) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

$$a_0 = 1, a_1 = 1$$

هـ) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} = 0$

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 1$$

و) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

ز) $a_n - 2\cos(\alpha)a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$$a_0 = 1, a_1 = \cos(\alpha)$$

ح) $a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

$$a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$$

(ط) $a_n - a_{n-4} = 0$

$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 1$

(ي) $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$

٢٣- أوجد حلا خاصا لكل من العلاقات الارتدادية التالية

(أ) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n + 2$

(ب) $a_n + 3a_{n-1} = 4^n$

(ج) $a_n - a_{n-1} = 2n^2 - n - 1$

(د) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n + 2^n$

(هـ) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$

(و) $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = n - 2$

(ز) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27(5^n)$

(ح) $4a_{n+2} - a_n = 3\cos(n\frac{\pi}{2})$

[إرشاد: ضع $a_n^{(p)} = c_1\cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2\sin(n\frac{\pi}{2})$]

٢٤- أوجد الحل لكل من المسائل التالية:

(أ) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3$

$a_0 = 1, a_1 = 1$

ب) $a_n - 2a_{n-1} = n^2$

$a_0 = 1$

ج) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$

$a_0 = 1, \ a_1 = 2$

د) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5(2^{n+1})$

$a_0 = 2, \ a_1 = -1$

هـ) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$

$a_0 = 1, \ a_1 = 0$

و) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$

$a_0 = 1$

ز) $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$

$a_0 = 2$

(ح) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 8(3^{n-2}) + 3(2^{n-2})$

$a_0 = -3,\ a_1 = -15$

(ط) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n$

$a_0 = 1,\ a_1 = 2$

٢٥- أوجد الحل لكل من المسائل التالية :

(أ) $a_n + na_{n-1} = n!$

$a_0 = 1$

(ب) $a_n - 2na_{n-1} = n$

$a_0 = 2$

(ج) $a_n - 2^{-n} a_{n-1} = 1$

$a_0 = 1$

(د) $a_n^3 - 2a_{n-1}^3 = 1$

$a_0 = 1$

(هـ) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$

$a_0 = 1, a_1 = 1$

(و) $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$

$a_0 = 4$

[إرشاد: ضع $b_n = \log_2 a_n$]

(ز) $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$

$a_0 = 273$

(ح) $a_n - na_{n-1} = n!$

$a_0 = 2$

٢٦- استخدم الدوال المولدة لحل المسائل التالية:

(أ) $a_n - a_{n-1} = n$

$a_0 = 1$

(ب) $a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}$

$a_0 = 1$

ج) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n$

$a_0 = 1, a_1 = 1$

د) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$a_0 = 0, a_1 = 1$

هـ) $a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$a_0 = 1, b_0 = 0$

و) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$

$b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n$

$c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$

$a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$

ز) $a_{n+1} = 5a_n + 6b_n + 1$

$b_{n+1} = -6a_n - 7b_n - 1$

$a_0 = \frac{3}{2}, b_0 = \frac{-3}{2}$

[ملاحظة: الحل ممكن بطريقة الحذف حيث نجد a_{n+2} من العلاقة الأولى ثم نعوض عن b_{n+1} و عن b_n فنحصل على علاقة للمتتالية (a_n) فقط.]

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0 = 2^n a_n$$ (ح)

$a_0 = 1,\ a_1 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$ (ط)

$a_0 = 1,\ a_1 = 1$

$$a_n = 2a_{n-1} + \frac{2^n}{n}$$ (ي)

$a_0 = 1$

مبدأ برج الحمام و أعداد رمزي

THE PIGEONHOLE PRINCIPLE AND RAMSEY'S NUMBERS

(٥،١) مبدأ برج الحمام

إن مبدأ برج الحمام بسيط ولكنه أداة فعّالة عندما نحاول إثبات أنه يوجد حل لمسألة تركيبية. و هذا المبدأ لا يرشدنا إلى كيفية الحصول على حل و لا يعطينا عدد الحلول الممكنة و لكنه يخبرنا أنه يوجد حل واحد، على الأقل، للمسألة المُعالجة.

مبرهنة(٥،١) (مبدأ برج الحمام)

إذا وزّعنا m كرة على n صندوقاً و كان $m > n$ فإنه يوجد صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ كرة على الأقل.

البرهان: نفرض أن كل صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ كرة على الأكثر. إذاً، يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي

$$n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \le n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m-1$$

و هذا يناقض أن عدد الكرات m ■

هناك صياغات متعددة لهذا المبدأ، و يمكن التعبير عنه بلغة المجموعات كما يلي:

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً بحيث $|A| = m, |B| = n, m > n$ و إذا رمزنا للصورة العكسية لأي عنصر $y \in B$ بالرمز $f^{-1}(y)$ ، فإنه يوجد $b \in B$ بحيث

$$|f^{-1}(b)| \ge \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$$

مثال(١،٥)

لكل عدد صحيح موجب n فإن كل مجموعة جزئية $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ عدد عناصرها $n+1$ من المجموعة $\{1,2,\ldots,2n\}$ يجب أن تحتوي على

(أ) عددين أوليين نسبياً.

(ب) عددين يقسم أحدهما الآخر.

البرهان:

(أ) نكون مجموعة الأزواج $A = \{(1,2),(3,4),\ldots,(2n-1,2n)\}$. لاحظ أن $|A| = n$.

إذن يكون لدينا $n+1$ كرة (الأعداد a_i) نريد توزيعها على n صندوقاً (الأزواج $(j, j+1)$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على

الأقل، و بالتالي يحتوي على كرتين بالضبط. إذن تحتوي المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ على عددين متعاقبين $2k-1, 2k$ و هما أوليان نسبياً.

(ب) لكل $1 \le j \le n+1$ ليكن $a_j = b_j 2^{i_j}$ حيث b_j عدد فردي، و لتكن $B = \{1,3,\ldots,2n-1\}$. واضح أن $|B| = n$ و أن $b_j \in B$ لكل j. بما أن عدد عناصر $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ يساوي $n+1$ و بما أن $|B| = n$ فإنه يوجد $k \ne m$ بحيث $b_k = b_m$. و بالتالي فإن $a_m = b_m 2^{i_m} = b_k 2^{i_m}$ و $a_k = b_k 2^{i_k}$. إذن a_k أو a_m يقسم الآخر.

إذا كان عدد الكرات الموّزعة يزيد على عدد الصناديق بواحد، فإنه ينتج من مبدأ برج الحمام أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على الأقل. المبرهنة التالية تعطينا تعميماً بسيطاً لهذه النتيجة.

مبرهنة(٢،٥)

إذا كانت $m_1, m_2, \ldots, m_n$ أعداداً صحيحة موجبة ووزعنا $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ كرة على n صندوقاً، فإنه إما أن يحتوي الصندوق الأول على m_1 كرة على الأقل، أو أن يحتوي الصندوق الثاني على m_2 كرة على الأقل، ...، أو أن يحتوي الصندوق رقم n على m_n كرة على الأقل.

البرهان:

نفرض أن الصندوق رقم k يحتوي على $m_k - 1$ كرة على الأكثر، لكل $k = 1,2,\ldots,n$. إذاً يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n$$

و هذا يناقض أن عدد الكرات يساوي $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ ■

مثال(٢، ٥)

إذا كانت $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فإنه توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $n+1$.

البرهان

لكل $1 \le i \le n^2 + 1$ نفرض أن t_i طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بالعدد a_i. إذا كان أي t_i أكبر من أو يساوي $n+1$ فإننا نحصل على المطلوب. لذلك نفرض أن $1 \le t_i \le n$ لكل i. إذاً يكون لدينا $n^2 + 1$ كرة (الأعداد t_i) نريد توزيعها على n صندوقاً (الأعداد $1,2,\ldots,n$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{n^2+1-1}{n} \right\rfloor + 1 = n+1$ كرة على الأقل. أي، يوجد على الأقل $n+1$ من الأعداد t_i بحيث تكون متساوية. سنثبت أن الأعداد a_i المصاحبة لهذه الأعداد t_i تكوّن متتالية جزئية متناقصة. نفرض أن $t_i = t_j$ حيث $i < j$. سنثبت أن $a_i > a_j$. إذا كان $a_i \le a_j$ فإن $a_i < a_j$ لأن حدود المتتالية المعطاة مختلفة. إذاً المتتالية الجزئية المكونة

من a_i متبوعاً بأطول متتالية جزئية تبدأ بالعدد a_j تعطينا متتالية جزئية متزايدة طولها t_j+1 . إذاً $t_i \geq t_j+1$، وهذا يناقض أن $t_i = t_j$.

تمارين(١،٥)

١- نقول إن A نقطة شبكية عندما تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة.

(أ) إذا كانت $A_i, i=1,2,3,4,5$ خمس نقاط شبكية مختلفة في المستوى، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

(ب) إذا كانت $A_i, i=1,2,\ldots,9$ تسع نقاط شبكية مختلفة في الفضاء R^3 ، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

٢- أثبت أنه إذا رتبت الأعداد $1,2,\ldots,36$ عشوائياً بشكل دائري، فإنه توجد ثلاثة أعداد متعاقبة بحيث يكون مجموعها أكبر من أو يساوي 56.

٣- تم تشغيل جهاز تكييف لمدة 300 ساعة خلال فترة امتدت 15 يوماً. أثبت أنه توجد ثلاثة أيام متعاقبة شغل خلالها الجهاز لمدة 60 ساعة على الأقل.

٤- عمل سائق سيارة لمدة 81 ساعة خلال فترة عشرة أيام. أثبت أنه يوجد يومان متعاقبان عمل خلالهما السائق 17 ساعة على الأقل.

٥- تدرب لاعب شطرنج لمدة 77 يوماً. و كان يلعب مباراة و احدة في اليوم على الأقل، لكنه لم يلعب أكثر من 132 مباراة طوال فترة التدريب. أثبت أنه توجد أيام متعاقبة خاض خلالها اللاعب 21 مباراة بالضبط.

٦- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً (بسيطاً منتهياً) بحيث $|V|\geq 2$، فأثبت أنه يوجد رأسان $x,y\in V$ بحيث $\deg(x)=\deg(y)$.

٧- إذا كانت C_{10} دورة في رسم ما، و إذا عنونت رؤوسها عشوائياً بالأعداد $1,2,3,\ldots,10$ ، فأثبت أنه توجد 3 رؤوس متعاقبة بحيث يكون مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 17.

٨- إذا كانت $A_1,A_2,\ldots,A_{2n}$ نقاطاً في المستوى بحيث $n\geq 2$، و إذا كانت أي ثلاث منها غير متسامتة (أي، لا يمر بها مستقيم)، و إذا كانت n^2+1 من القطع المستقيمة تصل بين هذه النقاط، فأثبت أن الشكل يحتوي على مثلث. [إرشاد: استخدم الاستقراء الرياضي على n و مبدأ برج الحمام]

٩- إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر والأزرق، فأثبت أنه توجد دورة ثلاثية بحيث يكون لأضلاعها اللون عينه.

١٠- إذا كان f تبديلاً ينتمي إلى زمرة التناظر $(S_n,\circ)$ ، فأثبت أنه يوجد عددان صحيحان موجبان i,j بحيث $f^i = f^j$ ، ثم استنتج أنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث f^k يساوي التبديل المحايد.

١١- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب m يقبل القسمة على n بدون باقٍ و يحتوي تمثيله العشري على الرقمين 7,0 فقط.

١٢- لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_m$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تحتوي بالضبط على n من الحدود المختلفة.إذا كان $m \geq 2^n$ ، فأثبت أنه توجد متتالية جزئية حدودها متعاقبة في المتتالية الأصلية بحيث يكون حاصل ضرب حدودها مربعاً كاملاً.

١٣- إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد المختلفة، فأثبت أنه إما توجد متتالية جزئية متزايدة عدد حدودها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة عدد حدودها $m+1$.

١٤- لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $a_1 < a_2 < \ldots < a_{mn+1}$. أثبت أنه إما توجد متتالية جزئية عدد حدودها $m+1$ بحيث أي حد من حدودها لا يقسم أي حد آخر أو توجد متتالية جزئية عدد حدودها $n+1$ بحيث يقسم كل حد من حدودها الحد الذي يليه.

١٥- مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 2 سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المثلث و على أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من 1 سم؟

١٦- مربع طول ضلعه 2 سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المربع و على أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من $\sqrt{2}$ سم؟

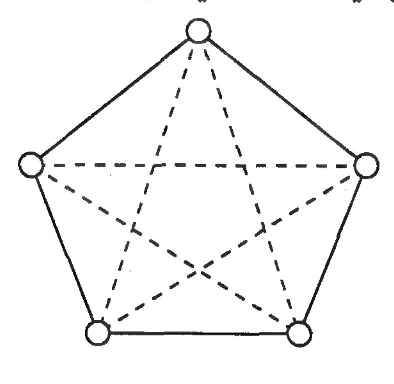
١٧- لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\subset Z^+$ مجموعة مؤلفة من 6 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\leq 14$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

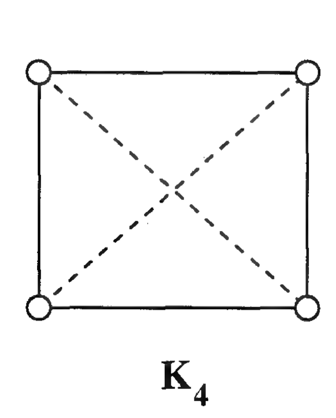
١٨- لتكن $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\subset Z^+$ مجموعة مؤلفة من 5 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\leq 9$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

(٥،٢) أعداد رمزي

إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر و الأزرق، فإنه يمكن استخدام مبدأ برج الحمام لإثبات أنه توجد دورة ثلاثية أحادية اللون. في الحقيقة، نختار أي رأس v في K_6 فيكون $\deg(v) = 5$. إذاً لدينا 5 كرات (الأضلاع الساقطة على v) نريد توزيعها على صندوقين (اللونين الأحمر و الأزرق). ينتج من مبدأ برج الحمام أنه يوجد على الأقل $\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ أضلاع أحادية اللون ساقطة على v. أي، توجد ثلاثة أضلاع، و لتكن $\{v,a\},\{v,b\}\{v,c\}$، لها اللون عينه، و ليكن الأحمر مثلاً. الآن، إذا كان أحد أضلاع الدورة الثلاثية التي رؤوسها a,b,c مصبوغاً باللون الأحمر فإننا نحصل على مثلث أحمر و إلا فإننا نحصل على مثلث أزرق.

نلاحظ أنه يمكن صبغ أضلاع كل من K_4 و K_5 باللونين الأحمر و الأزرق بحيث لا نحصل على أي مثلث أحادي اللون. على سبيل المثال، إذا مثلنا اللون الأحمر بخط متصل و اللون الأزرق بخط متقطع فإن كلاً من الرسمين التاليين لا يحتوي على أي مثلث أحادي اللون.


K_5


K_4

كما نلاحظ أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإنه لكل $n \geq 6$ لا بد أن يحتوي K_n على مثلث أحادي اللون؛ لأن K_n يحتوي على نسخة من K_6 لكل $n \geq 6$.

مما سبق ينتج أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإن أصغر عدد n يضمن لنا احتواء K_n على مثلث أحادي اللون يساوي 6. و نقول إن العدد 6 له خاصة رمزي من النوع (3,3) و العدد 5 ليس له هذه الخاصة كما نقول إن العدد 6 أحد أعداد رمزي. و أكثر تحديداً نقول إن 6 هو عدد رمزي من النوع (3,3) و نكتب $R(3,3) = 6$.

تعريف(٥،١)

لتكن i, j, m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $j \geq 2$ و $i \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع (i, j) إذا تحقق ما يلي: كلما صبغنا أضلاع K_m باللونين الأحمر و الأزرق، فإنه إما أن يحتوي K_m على K_i أحمر اللون أو على K_j أزرق اللون.

تعريف(٥،٢)

ليكن i, j عددين صحيحين موجبين بحيث $j \geq 2$ و $i \geq 2$. يسمى أصغر عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i, j) بعدد رمزي من النوع (i, j) و يرمز له بالرمز $R(i, j)$.

نهدف الآن إلى إثبات أن العدد $R(i, j)$ موجود لكل $i \geq 2$ و $j \geq 2$ ، و سنصل إلى ذلك عبر النتائج التالية.

تمهيدية(٥،١)

(أ) إذا كان n له خاصة رمزي من النوع (i, j) و كان $m > n$ ، فإن m له خاصة رمزي من النوع (i, j).

(ب) إذا كان n ليس له خاصة رمزي من النوع (i, j) و كان $m < n$ ، فإن m ليس له خاصة رمزي من النوع (i, j).

(ج) إذا كان $i \geq k$ ووجد $R(i, j)$ ، فإن $R(i, j) \geq R(k, j)$.

(د) $R(i, j) = R(j, i)$ كلما وجد $R(i, j)$.

(هـ) $R(2, k) = 2$ لكل $k \geq 2$.

البرهان: نترك البرهان كتمرين بسيط للقارئ.

تمهيدية(٥،٢)

إذا كان i, j عددين صحيحين بحيث $j \geq 3$ و $i \geq 3$ ووجد $R(i-1, j)$ و$R(i, j-1)$ ، فإن $R(i, j)$ موجود و يحقق

$$R(i, j) \leq R(i, j-1) + R(i-1, j)$$

البرهان:

ضع $n = R(i, j-1) + R(i-1, j)$. يكفي أن نثبت أن n له خاصة رمزي من النوع (i, j). اصبغ كل ضلع في K_n إما باللون الأحمر أو باللون الأزرق، و افرض أن v أحد رؤوس K_n. عرّف مجموعتي الرؤوس المنفصلتين D و F كما يلي:

$x \in D$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أحمر اللون و $x \in F$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أزرق اللون. و بالتالي فإن

$$|D| + |E| = |D \cup E| = n - 1 = R(i, j-1) + R(i-1, j) - 2 + 1$$

إذاً، بتطبيق المبرهنة(٢،٥)، ينتج أنه إما أن يكون $|D| \geq R(i, j-1)$ أو $|F| \geq R(i-1, j)$.

افرض أن $m = |D| \geq R(i, j-1)$ [البرهان مشابه في الحالة الأخرى]. إذاً، يحتوي K_m على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون. ومن $m < n$، ينتج أن K_n يحتوي على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون. في الحالة الثانية، يحتوي K_n على الرسم التام $K_{j-1} + v$ الذي هو أزرق اللون. إذاً، n له خاصة رمزي من النوع (i, j) ■

إن النتيجة المباشرة لمبرهنة رمزي التالية هي أن عدد رمزي $R(i, j)$ موجود لكل $i \geq 2$ و $j \geq 2$.

مبرهنة(٣،٥)(مبرهنة رمزي)

إذا كان i, j عددين صحيحين بحيث $i \geq 2$ و $j \geq 2$، فإنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i, j).

البرهان:

نستخدم الاستقراء الرياضي على n حيث $n = i + j$. من التمهيدية(١، ٥) ينتج أن $R(3,2) = R(2,3) = R(2,2) = 2$ ، و بالتالي فإن المطلوب صحيح عندما $n = 4$ ، $n = 5$. الآن نفرض أن المطلوب صحيح عند n و نثبت صحته عند $n+1$. افرض أن $n+1 = i + j$. إذاً، $i + (j-1) = n$ و $(i-1) + j = n$. من فرضية الاستقراء ينتج أنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i-1, j)$ كما يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i, j-1)$. و بالتالي، فإن كلاً من $R(i-1, j)$ و $R(i, j-1)$ موجود. الآن، بتطبيق التمهيدية(٢، ٥)، نجد أن $R(i, j)$ موجود؛ أي أن المطلوب صحيح عند $n+1$ ■

في بداية هذا البند، استخدمنا تلوينات أضلاع K_m لتعريف خواص رمزي. و لغرض تعميم و تطوير الأفكار السابقة، فإن تعريف خاصة رمزي من نوع ما يصاغ بلغة المجموعات على النحو التالي.

تعريف(٣، ٥)

لتكن i, j, m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $j \geq 2$ و $i \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع $(i, j;2)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m ، و كانت $P = \{X,Y\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 2 ؛ فإنه إما أن توجد مجموعة جزئية I من V بحيث عدد عناصر I يساوي i و بحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I التي

عدد عناصر كل منها 2 محتواة في X ، أو أن توجد مجموعة جزئية J من V بحيث عدد عناصر J يساوي j و بحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من J التي عدد عناصر كل منها 2 محتواة في Y .

وبناءً على ما سبق، نرمز لعدد رمزي من النوع $(i, j;2)$ بالرمز $R(i, j;2)$.

و بهدف التعميم، لتكن $i_1, i_2, \ldots, i_n, k$ أعداداً صحيحة موجبة بحيث $n \geq 2$ و $i_j \geq k$ لكل $j = 1,2,\ldots,n$. نقول إن العدد الصحيح الموجب m له خاصة رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m ، و كانت $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها k ؛ فإنه يوجد j بحيث توجد مجموعة جزئية I_j من V بحيث عدد عناصر I_j يساوي i_j و بحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I_j التي عدد عناصر كل منها k محتواة في X_j . و يرمز لعدد رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ بالرمز $R(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$. و يمكن العودة إلى المراجع للاطلاع على البراهين التي تبين وجود هذه الأعداد، و سنكتفي هنا بعرض الحالة البسيطة التي تجعلنا نلاحظ أن نظرية رمزي تعميم عميق لمبدأ برج الحمام.

مبرهنة(٤،٥)

$$R(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1) = i_1 + i_2 + \cdots + i_n - (n-1)$$

البرهان:

ضع $m = i_1 + i_2 + \cdots + i_n - (n-1) = i_1 + i_2 + \cdots + i_n - n + 1$. سنثبت أولاً أن m له خاصة رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1)$. لتكن V مجموعة عدد عناصرها m، و لتكن $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1. بالاستناد إلى المبرهنة(٢،٥) نجد أنه يوجد j بحيث $|X_j| \geq i_j$. إذاً، X_j تحتوي على مجموعات جزئية عدد عناصر كل منها i_j، و باختيار أي من هذه المجموعات الجزئية على أنها I_j، نستنتج أن m له الخاصة المطلوبة. إذاً، $R(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1) \leq m$. و للحصول على المساواة نثبت أن $m-1$ ليس له خاصة رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1)$. في الحقيقة، إن $m - 1 = i_1 + \cdots + i_n = (i_1 - 1) + \cdots + (i_n - 1)$؛ و إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها $m-1$، و كانت $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1 بحيث تحقق $|X_j| = i_j - 1$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$؛ فإنه لا توجد X_j بحيث تحتوي على مجموعة جزئية I_j عدد عناصرها i_j ■

و ننهي هذا البند بالإشارة إلى أن هناك بعض النتائج التي تعطي حدوداً علياً أو حدوداً سفلى لأعداد رمزي. و لكن حساب هذه الأعداد أمر في غاية الصعوبة، كما أن المعروف منها قليل جداً.

تمارين(٢،٥)

١-أثبت التمهيدية(١،٥).

٢- إذا كان $i \geq k,\ \ j \geq k$ فأثبت أن

(أ) $R(i,k;k) = i$ (ب) $R(k,j;k) = j$

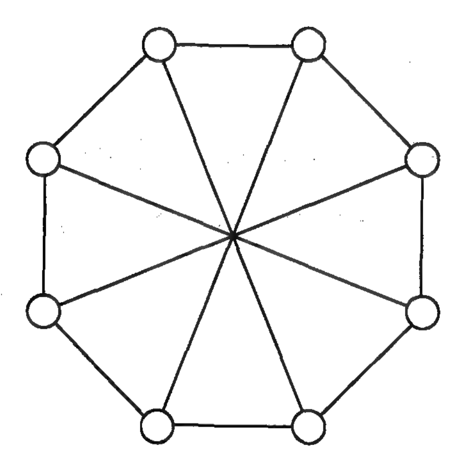
٣- ليكن i, j عددين صحيحين بحيث $i \geq 3,\ \ j \geq 3$. إذا كان كل من $R(i,\ \ j-1)$ و $R(i-1,\ \ j)$ عدداً زوجياً، فأثبت أن

$$R(i,j) \leq R(i,j-1) + R(i-1,\ \ j) - 1$$

٤- أثبت أن $R(3,\ 4) = 9$ كنتيجة لما يلي:

(أ) استخدم التمرين ٣ لبيان أن $R(3,\ 4) \leq 9$

(ب)أصبغ الرسم أدناه باللون الأحمر و بقية أضلاع الرسم K_8 باللون الأزرق، ثم استنتج أن العدد 8 ليس له خاصة رمزي من النوع (3,4).



٥- أثبت أن $R(3,\ 5) = 14$ كنتيجة لما يلي :

(أ) استخدم التمهيدية(٢ ،٥)، التمهيدية(١ ،٥)(هـ)، و التمرين ٤ لبيان أن $R(3,\ 5) \le 14$.

(ب) أثبت أن العدد 13 ليس له خاصة رمزي من النوع (3,5) ، و ذلك باستخدام التلوين التالي لأضلاع K_{13}. لتكن $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{13}\}$ هي مجموعة رؤوس K_{13}. لكل $1 \le i, j \le 13$ اصبغ الضلع $\{v_i, v_j\}$ باللون الأحمر إذا كان $|i - j|$ يساوي 1 ، 5 ، 8 أو 12 واصبغ الأضلاع المتبقية باللون الأزرق.

٦- إذا كان i, j عددين صحيحين بحيث $i \ge 2,\ j \ge 2$. فأثبت أن

$$R(i, j) \le \binom{i + j - 2}{i - 1}$$

دليل المصطلحات

Bell numbers	أعداد بل
Ramsey's numbers	أعداد رمزي
Catalan numbers	أعداد كتلان
Stirling numbers of the second kind	أعداد ستيرلنج من النوع الثاني
Convolution	التفاف
Permutation	تبديل
Derangement	تبديل تام
Partitions of positive integers	تجزئات الأعداد الصحيحة
Partitions of sets	تجزئات المجموعات
Edge coloring	تلوين الأضلاع
Combination	توفيق أو تركيب
Generating function	الدالة المولدة

Exponential generating function	-- الأسية
Ordinary generating function	-- العادية
Order of a recurrence relation	رتبة علاقة ارتدادية
Complete graph	رسم تام
Closed formula	صيغة مختصرة
Ferrers diagram	شكل فيرير
Recurrence relation	علاقة ارتدادية
Linear recurrence relation	-- خطية
Homogeneous recurrence relation	-- متجانسة
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
The inclusion-exclusion principle	مبدأ التضمين و الاقصاء
Superpostion principle	مبدأ التراكب
The rule of sum	مبدأ المجموع
The rule of product	مبدأ حاصل الضرب
The rule of correspondence	مبدأ التقابل
Sequence	متتالية

Triangulation	مثالثة
Multiset	مجموعة مضاعفة
Binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين
Pascal's identity	متطابقة باسكال
Binomial series	متسلسلة ذات الحدين
Formal power series	متسلسلة قوى شكلية
Generalized binomial coefficients	معاملات ذات الحدين المعممة
Multinomial theorem	مبرهنة متعددة الحدود
Transpose	منقول
The sample model of counting	نموذج العينة للعد
The distribution model of counting	نموذج التوزيع للعد

المراجع

المراجع العربية

[1] سمحان، معروف و شراري، احمد، *مبادئ الرياضيات المتقطعة*. جامعة الملك سعود، ١٤١٩هـ.

المراجع الأجنبية

[2] Biggs N. L., *Discrete Mathematics.* University press, Oxford, 1987.

[3] Michaels J. G. and Rosen K. H., *Applications of Discrete Mathematics*. McGraw-Hill, Inc., International Edition 1992.

[4] Roberts F. S., *Applied Combinatorics*. Prentice-Hall, 1984.

[5] Stanley R. P., *Enumerative Combinatorics , Volume I*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software, Montery, California, 1986.

[6] Townsend M., *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory,* The Benjamain/Cummings, California, 1987.

[7] Tuker A., *Applied Combinatorics.* John Wiley and Sons, 1980.